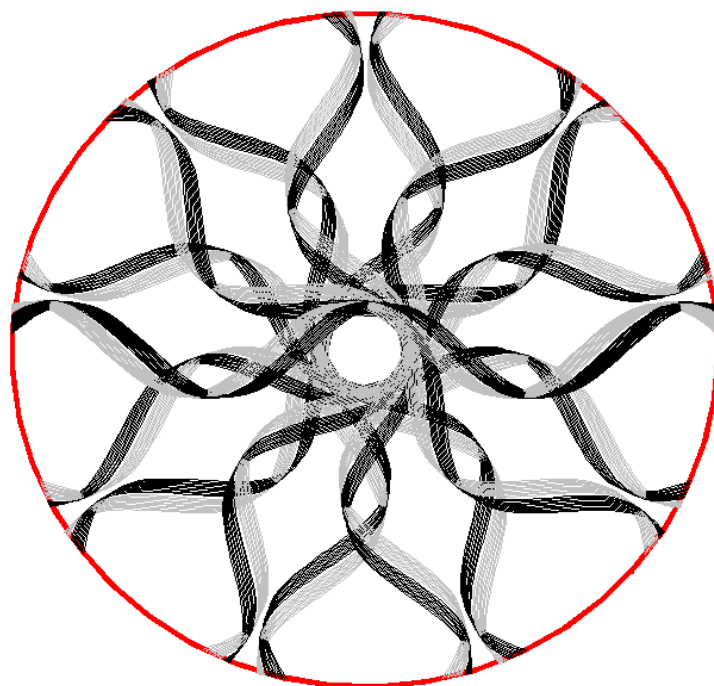


Computeralgebra in Lehre, Ausbildung und Weiterbildung V
20.-22.4.2006, Haus Schönenberg, Ellwangen



Vorbereitungen
auf das CAS-Zentralabitur
2007 in Berlin

Eberhard Lehmann

Berlin, Februar 2006

Vorbereitungen auf das Zentralabitur 2007 mit CAS in Berlin

Eberhard Lehmann, Berlin

Die Voraussetzungen

- Die meisten Berliner Mathematiklehrer warten mit großer Skepsis auf das kommende Zentralabitur. Bisher wurden die Abituraufgaben vom Lehrer selbst erstellt und zur Genehmigung eingereicht.
- Bei den selbsterstellten Aufgaben haben vereinzelt Lehrer schon seit Jahren auch Aufgaben mit Computereinsatz gestellt, meistens mit DERIVE oder TI-92 / Voyage 200. Diese wurden in der Regel auch von der Schulverwaltung genehmigt.
- **Der CAS-Einsatz im Unterricht hat in den letzten Jahren durch Fortbildungsveranstaltungen des LISUM Berlin oder von T3-Münster, Projekte und einen CAS-Arbeitskreis erheblich an Bedeutung gewonnen.**
- Die „CAS-Lehrer“ warten noch mit besonderer Spannung auf das CAS-Zentralabitur. Das Zentralabitur ist für sie neu und für manchen auch das erste CAS-Abitur.
- Es wurde erreicht, dass das Zentralabitur für Leistungs- und auch für Grundkurse mit einem speziellen Aufgabensatz mit CAS geschrieben werden kann.
- Die daran interessierten Schulen mussten sich vor einigen Wochen melden. Es sind ca. 15 Schulen mit 18 Leistungskursen und 16 Grundkursen.
- Vor einigen Monaten ist ein „Fachbrief“ mit Zentralabitur-Beispielaufgaben – ohne und mit CAS – an alle Schulen gegangen.

Es gibt also ein CAS-Abitur (keine Rechner unterhalb der Leistungsfähigkeit von CAS)
und ein Ohne-CAS-Abitur (aber auch ohne graphischen TR, der in Berlin keine große Rolle spielt).

Das kommende Zentralabitur 2007 oder andere gemeinsame Prüfungen stehen keineswegs im Widerspruch zum Computereinsatz im Unterricht und in Prüfungen. Schon in den Jahren vor dem Zentralabitur hat sich der Computereinsatz im Abitur an etlichen Schulen bewährt. Auf die diesbezüglichen Erfahrungen kann bei der Planung einer weiteren Verbreitung des Medieneinsatzes aufgebaut werden.

Die Entwicklungen sind auch insofern nicht mehr umkehrbar, als viele Schulen auch bereits in der Sekundarstufe 1 Taschencomputer einsetzen, zuweilen schon ab Klasse 5.

Langfristige Vorbereitungen auf CAS-Abituraufgaben

A Evaluation des Berliner CAS-Projekts Sekundarstufe 2 – 2003-2005

Mathematik mit CAS im Grundkurs
Unterricht – Strategien - Klausuren - Abitur

Inhaltsverzeichnis

	Vorwort	2
1.	Projektplanung – Projektziele	3-4
2.	Projektablauf Workshops – Unterrichtsbesuche - Abschlusstagung	5-8
3.	Unterrichtsbeispiele mit CAS-Einsatz	9-32
3.1	Bericht über die ersten drei Wochen des Einsatzes des Taschencomputers VOYAGE™ 200 im Grundkurs Mathematik, Klasse 12 (Lutz Geist)	9
3.2	Ableitung der Sinus-Funktion (Matthias Müller)	13
3.3	Näherungsweise Zeichnung von Ableitungsfunktionen mit dem Taschencomputer	21
3.4	Wachstumsfunktionen im Leistungskurs Mathematik (Ursula Wunsch)	24
3.5	Viele Kreise – eine Unterrichtsstunde im Grundkurs, 1. Semester	27
3.6	Anmerkungen zu Hausarbeiten mit CAS	31
4.	Klausuren mit CAS-Einsatz	33-46
4.1	Anmerkungen zur Zeiteinschätzung bei der Bearbeitung von CAS-Aufgaben in Abitur- und anderen Klausuren und in Klassenarbeiten	33
4.2	Tipps für Klassenarbeiten mit CAS – auch nützlich für den Unterricht	34
4.3	Eine Grundkursklausur zur Analytischen Geometrie (Lutz Geist)	39
4.4	Eine Grundkurs-Klausur zur Analysis (Christiane Vogt)	40
4.5	Einige Leistungskurs-Klausuraufgaben (Angelika Reiß, Ulrich Döring)	42
5.	CAS im Abitur	47-58
5.1	<i>Computer und offene Aufgaben in Klausuren und im schriftlichen Abitur (Diskussionsbeitrag)</i>	47
5.2	<i>Vorschlag für eine Abituraufgabe (Günter Dreesen-Meyer)</i>	50
5.3	<i>Eine ausführlich kommentierte Grundkurs-Abitur-Klausur</i>	52
5.4	<i>Mündliches Abitur mit dem Taschencomputer</i>	55
6.	Schülermeinungen	59-61

Die beteiligten Kolleginnen (ca 20 aus 7 Schulen) haben – wenn sie Abiturseite unterrichteten - im Jahr 2006 das Abitur mit CAS geschrieben, meistens im Grundkurs.

B Die Workshops im Berliner CAS-Arbeitskreis

C Arbeitsgruppe zur Erstellung von Aufgaben für das Zentralabitur

In dieser AG arbeiten auch Kolleginnen aus den Berliner CAS-Projekten mit.

D Einladung zur Tagung ZA-MIT-CAS im Mai 2006 in Großbeeren

Überlegungen zur Erstellung von CAS-Aufgaben für das Zentralabitur

**(I) CAS-Aufgabe und Standardaufgabe haben denselben KERN.
Das ist der Berliner Ansatz für die Zentralabituraufgaben.**

Dieser Kern kann u.a. enthalten:

- Eine vorgegebene Abbildungen, z. B. zwecks Erläuterung,
- eine vorgegebene Rechnung, z. B. zwecks Erläuterung,
- einen Modellbildungsprozess,
- eine Beweisaufgabe, z. B. auch einen vorgegebenen Beweis mit Lücken,
- Aufgaben zum Verständnis von Sachverhalten

Der Kern sollte nicht enthalten:

- Abarbeiten eines Rechen-Algorithmus,
- Rechenintensive / zeichenintensive Aufgaben,
- Erstellen von Zeichnungen,
weil all das mit CAS viel schneller geht.

Auch das wären eine mögliche Vorgehensweisen:

- (II) Eine vollständige Standardaufgabe, aus der eine CAS-Aufgabe abgeleitet wird.
- (III) Eine vollständig auf CAS ausgerichtete Aufgabe

Anmerkungen zur Zeiteinschätzung bei der Bearbeitung von CAS-Aufgaben in Abitur- und anderen Klausuren und in Klassenarbeiten
(Ein Auszug aus dem Evaluationsheft zum 2.Berliner CAS-Projekt)

Hinweis: Die folgenden Überlegungen gelten in übertragenem Sinn auch für den Unterricht mit CAS.

Vor einer Unterschätzung des Zeitaufwands von Rechnungen und Zeichnungen mit CAS muss gewarnt werden - u.a. aus folgenden Gründen:

1. Eingaben können *Syntaxfehler* aufweisen und müssen ggf. korrigiert werden. Das ist gerade bei komplexeren Termen nicht selten nötig.
2. Bei *Semantikfehlern* muss neu überlegt und neu eingegeben werden.
3. Ein- und Ausgaben müssen je nach Aufgabenstellung *dokumentiert* werden.
4. Dabei muss ggf. *zwischen wichtigen und nebensächlichen Zeilen unterschieden* werden.
5. *Ausgaben* sind u. U. unhandlich und müssen ggf. umgeschrieben werden.
6. Bei komplexen Termen / Zeichnungen *vergeht Rechenzeit* (Voyage 200), insbesondere ist das der Fall bei Kurvenscharen.
7. Bei Zeichnungen muss die *passende Window-Einstellung* gefunden werden.
8. Bei Rechnungen und Zeichnungen kommt es häufig auf die *richtige modus-Einstellung und andere Einstellungen* (rad-degree, exact-approx, Nachkommastellen, line usw.) an.
9. Da es häufig mehrere Bearbeitungsmöglichkeiten mit CAS gibt, benötigt der S die Kompetenz, sich für einen Weg zu entscheiden. Das erfordert *gezielte und kompetente Auswahl der CAS-Befehle*.
10. Die Rechnerarbeit kann von den S sehr unterschiedlich geleistet werden. Das reicht von *ungeschickter Bearbeitung bis hin zu sehr eleganter Bearbeitung*, z.B. durch passende Abkürzungen von Funktionen oder Datenmengen und deren Mehrfachverwendung.
11. *Experimentelles Arbeiten kostet besonders viel Zeit* - hierauf treffen alle obigen Aspekte zu.

Rechnereinsatz muss vom Benutzer geplant werden! Bei komplexeren Bearbeitungen entspricht das dem Entwurf eines kleinen Programms und das kostet Zeit!

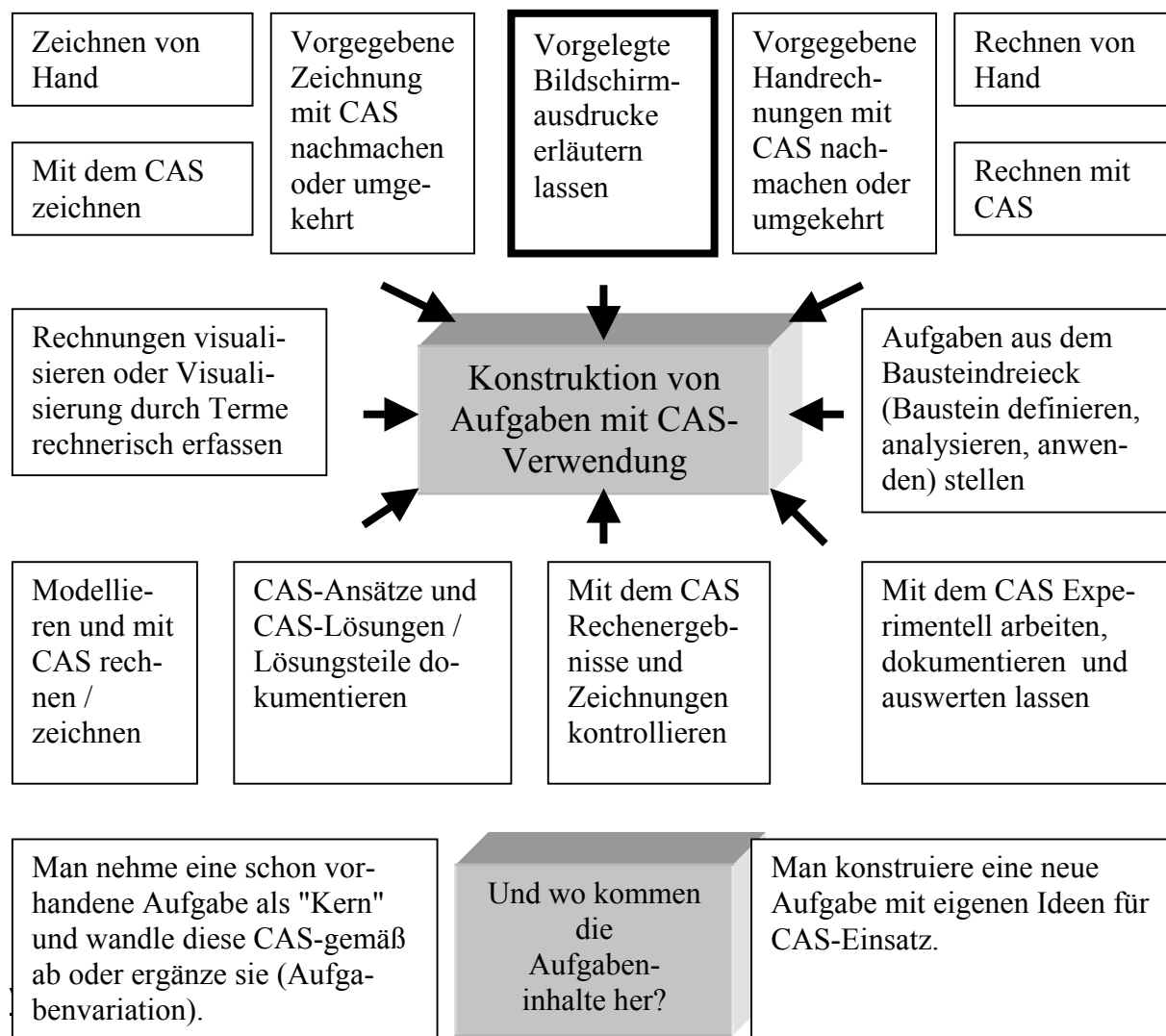
- Alle genannten Aspekte sind typisch für die Arbeit mit CAS und müssen beim Zeitansatz für die Teilaufgaben berücksichtigt werden. Das bedeutet u.a., dass eine komplexere Rechenaufgabe oder Zeichnung nicht einfach mit einem oder wenigen Knopfdrücken erledigt ist.
- **Für die Zuordnung von Bewertungseinheiten ist weiterhin (wie bisher) die für eine Teilaufgabe benötigte Zeit entscheidend.** In diese gehen indirekt die abgefragten Kompetenzen mit ein!
- **Zuletzt ein sehr hilfreicher Tipp für die Zeiteinschätzung:** Man stelle alle bei der eigenen Lösung verwendeten Computerbildschirme zusammen und markiere das, was der S dokumentieren soll. Beides vermeidet eine Unterschätzung des benötigten Zeitaufwands!

Tipps für Klassenarbeiten mit CAS - auch nützlich für den Unterricht

Sie finden hier Tipps und zusätzliche Erläuterungen zu folgenden Aspekten:

- Visualisieren mit CAS-Hilfe
- Kontrollieren mit CAS
- Vorgelegte Zeichnungen oder Rechnungen ergänzen
- Aufgaben zur Dokumentation
- Das Bausteindreieck (definieren, analysieren, anwenden)
- Veränderte Aufgabekultur → offene Aufgaben
- CAS und Handrechnung
- Ansätze finden lassen - Modellbildung

Die folgende Abbildung fasst mögliche Aufgabenansätze zusammen:



Das Arbeiten mit Visualisierungen kann von verschiedenen Seiten aus erfolgen.

Die Rekonstruktion vorgegebener Abbildungen kann man als eine Standardaufgabe für Grafikrechner oder CAS ansehen. Der Lösungsweg wird in der Regel sein:

- 1) Den geeigneten Maßstab wählen und für den ausgewählten Graphen ablesbare Punkte suchen. Die Koordinaten ablesen.
- 2) Mit diesen Vorgaben kann die Funktionsgleichung aufgestellt werden.
- 3) Zeichnen des Graphen.
- 4) Kontrolle des Graphen (charakteristische Punkte vergleichen).
- 5) Entsprechend wird mit allen Graphen verfahren.
- 6) Gesamtbild kontrollieren.

Um zur Rekonstruktion einer Zeichnung zu kommen, muss der Schüler den *Zusammenhang* zwischen Funktionsgleichung und Graph (z. B. lineare Funktionen und Geraden) *verstanden haben*. Er liest zum Beispiel bei Geraden m und n oder 2 Punkte aus dem Graphen ab, ermittelt die Funktionsgleichung und zeichnet erneut. Dabei muss er noch die Fenstergröße und den Maßstab beachten.

Je nach Kenntnisstand der Schüler und bei komplexeren Abbildungen kann diese Aufgabenstellung einen guten Zugang zum experimentellen Arbeiten mit dem Rechner geben.

Kontrollieren mit CAS

Das CAS kann auf verschiedene Arten zu Kontrollarbeiten eingesetzt werden. Es schafft damit Sicherheit für den Schüler.

- Eigene oder vorgelegte Handrechnungen überprüfen
- Zeichnungen überprüfen
- Vermutungen überprüfen
- Vorgelegte Lösungen verifizieren

Aufgaben zur Dokumentation

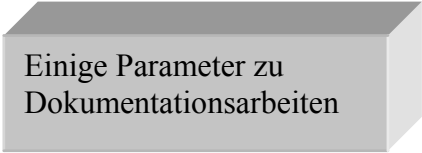
a) Allgemeine Bemerkungen

Dokumentationserwartungen:

Die Erwartungen an die Dokumentation von Computerarbeit entwickelt sich im Verlaufe des Vertrautwerdens der Schüler mit dem Programm und den mathematischen Inhalten.

Die jeweilige Dokumentation ist situationsabhängig und softwareabhängig!

- Welchen Rechner-Kennntnisstand haben die Schüler?
Ist es eine Neueinführung?
War bisher eine
 - nur kurze Benutzungsdauer,
 - mittlere Benutzungsdauer,
 - bereits lange Benutzungsdauer?
 - Welche Software wird benutzt? Welche Verknüpfungsmöglichkeiten mit anderer Software (z.B. mit Textverarbeitung sind möglich und erwünscht)
Handelt es sich um CAS, DGS, Tabellenkalkulation, sonstige spezielle M-Software?
 - Welche Dokumentationsmöglichkeiten sind in dem jeweiligen Kurs überhaupt möglich?
In welcher Situation? – Hausarbeit, Unterrichtsarbeit, Klassenarbeit, Klausur, Abiturarbeit
- Daraus folgt:



Einige Parameter zu Dokumentationsarbeiten

Es lassen sich nur einige wenige allgemeine Grundsätze aufstellen und einige Tipps zur Dokumentation von Computerarbeit geben. Es ist nötig, sich die jeweiligen Situationsparameter bewusst zu machen.

b) Dokumentationstipps für Schüler und Lehrer

Hinweise an Schüler zum Übernehmen von Zeichnungen vom Computerbild

- Auf kariertem Papier mit Bleistift zeichnen,
- charakteristische Punkte möglichst genau eintragen (z. B.: Schnitte mit den Achsen, Extremwerte, ...), sonstige Auffälligkeiten beachten,
- wichtige Zahlenwerte (gerundet) eintragen (Rechner-Koordinatenanzeigen verfolgen),
- in der Regel maßstabsgetreu zeichnen.

Hinweise an Schüler zur Dokumentation von Termen

- Für einen Vorgang (Bildschirmarbeit) ein Rechteck geeigneter Größe als Bildschirmabbild benutzen. Im Rechteck stehen Eingaben, Ausgaben und Erläuterungen dazu. Durch das Rechteck werden Texte zur Rechnerarbeit abgegrenzt von dem anderen Text.

Eingabe:	$m \cdot x + n \rightarrow \text{gerade}(x, m, n)$
ggf. Erläuterungen:	Hier wird ein Baustein für die Geradenform $y = mx + n$ definiert
Ausgabe:	done
ggf. Erläuterungen:	der Baustein wurde gespeichert
Eingabe	$\text{gerade}(x, 3, 4)$ Der Baustein wurde aufgerufen mit $m=3$ und $n=4$
Ausgabe	$3x+4$ für m und n wurden die Werte eingesetzt, so entsteht der ausgegebene Term

- Man kann die Teile der Bildschirmarbeit auch farblich markieren lassen.

c) Komplexe Terme, längere Rechnungen

Bei komplexen Termen und längeren Rechnungen sollte man mit Zwischenergebnissen arbeiten. Diese werden geeignet bezeichnet und können in der darauf folgenden Arbeit wieder verwendet werden. Häufig empfiehlt sich dabei auch die Berücksichtigung der auftretenden Variablen als Parameter.

Beispiel: Die Gleichung $m \cdot x + 2 = 3 \cdot x - 2$ wird abgekürzt mit $\text{gleich}(x, m)$. Also $m \cdot x + 2 = 3 \cdot x - 2 \rightarrow \text{gleich}(x, m)$. Damit steht dieser Baustein ab jetzt zur Verfügung.

Teilergebnisse vorgeben

Bei komplexeren Aufgaben trägt ein Vorgeben von Teilergebnissen (Zahlenergebnisse, Terme, Zwischenzeichnung) zu einer Vorstrukturierung bei und ermöglicht Kontrollen, die den Schüler bei seiner Arbeit bestätigen. Auf diese Weise können schwierigere Aufgaben "entschärft" werden.

d) Umfang der Bearbeitungen

Dieser kann recht unterschiedlich sein. So kann man z.B. einige Zeilen der Abbildungen durch zusätzliche Heftskizzen oder weitere Anwendungen eines definierten Bausteins erläutern.

Vorgelegte Zeichnungen oder Rechnungen ergänzen oder nachvollziehen

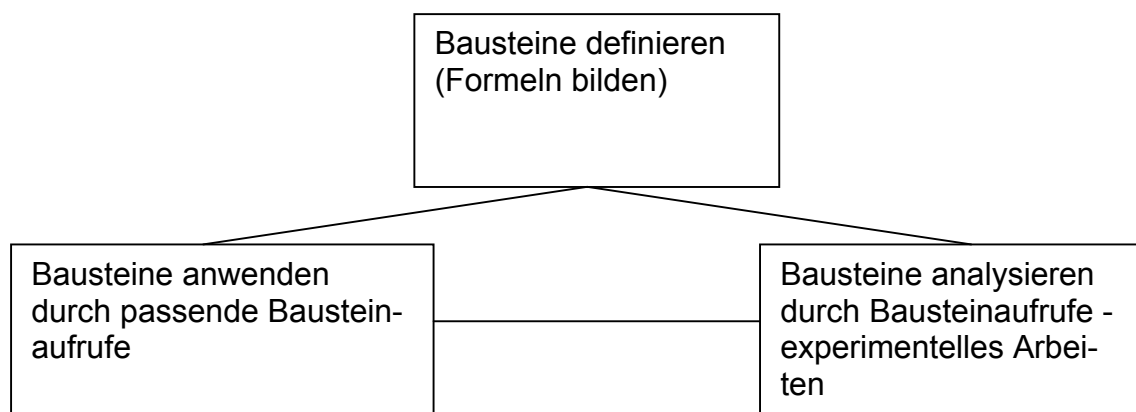
Formulierung von Aufgaben zu gegebenen Bildern

- 1) Ein Schüler hat mit der Abstandsformel folgendermaßen gearbeitet (gegebene Bildschirmausdrucke).
Erläutere seinen Weg mit Hilfe eines Textes und ggf. auch durch zusätzliche Skizzen.
- 2) Formuliere Aufgaben zum Inhalte der beiden Bilder.
- 3) Schreibe einen mathematischen Aufsatz zu den beiden Abbildungen.
- 4) Ohne das Vorgeben der beiden Abbildungen: Veranschauliche das Problem „Abstand eines Punktes von einem Graphen“ mit Hilfe des CAS und erläutere dein Vorgehen.

Die Anforderungen steigen von 1) nach 4).

Das Bausteindreieck

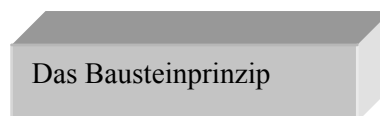
Dem Leser wird aufgefallen sein, dass in vielen Klassenarbeitsaufgaben das Bausteinprinzip verwendet wurde. Hierfür ergeben sich diverse Aufgabenstellungen und Ansätze, indem man das "**Bausteindreieck**" beachtet.



Für Aufgaben mit Geraden sind z. B. folgende Bausteine geeignet:

$$\begin{array}{ll}
 m \cdot x + n & \rightarrow \text{gera}(x, m, n) \\
 a \cdot x + b \cdot y = c & \rightarrow \text{glei}(a, b, c) \\
 a \cdot x + b \cdot y = c & \rightarrow \text{glei2}(x, y, a, b, c)
 \end{array}$$

unter zusätzlicher Benutzung von
SOLVE



Arbeitet man z. B. viel mit linearen Gleichungssystemen, so empfiehlt sich die Definition einer Bausteins:

- $\text{SOLVE}(a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1 \text{ and } a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2, \{x, y\}) \rightarrow \text{lgs}(a1, b1, c1, a2, b2, c2)$
- Der Aufruf $\text{lgs}(1, -0.7, 8, 5, 0.3, 2)$ liefert dann Lösungen zu einem speziellen LGS:

- Der Aufruf $\text{lgs}(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2)$ liefert sogar die Formeln für x und y . Siehe Voyage-

The screenshot shows the TI-84 Plus calculator interface. At the top, the function menu is open, showing options: Algebra, Calc, Other, PrgmIO, and Clean Up. The 'Algebra' option is selected. Below the menu, the following text is displayed:

```

solve(a1·x + b1·y = d1 and a2·x + b2·y = d)
Done
lgs(1, -.7, 8, 5, .3, 2)  x = 1 and y = -10
lgs(a1, b1, d1, a2, b2, d2)
x =  $\frac{-(b_1 \cdot d_2 - b_2 \cdot d_1)}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}$  and y =  $\frac{a_1 \cdot d_2 - a_2 \cdot d_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}$ 
lgs(a1, b1, d1, a2, b2, d2)

```

At the bottom of the screen, the status bar shows 'MAIN', 'RAD EXACT', and 'PAR 3/30'.

Veränderte Aufgabekultur → offene Aufgaben

Die veränderte Aufgabekultur wird in vielen der vorgelegten Klassenarbeiten deutlich in

- einer Betonung des Findens von Ansätzen,
- den Aufträgen, vorgegebenes Material weiter zu verarbeiten,
- einer Vermischung händischen Rechnens mit CAS- und Grafikanteilen,
- Verständnisfragen zur verwendeten Mathematik,
- der Aufforderung zur Wahl eigener oder mehrerer Lösungswege.

CAS und Handrechnung

Grundlegende Algorithmen müssen im Unterricht auch von Hand beherrscht werden - allerdings nicht mehr in dem Umfang und der Tiefe, wie noch häufig praktiziert. Aufgabenskaden können entfallen. Wenn die Terme komplizierter werden, ist der Einsatz des CAS angesagt! Um dieses verständlich einzusetzen, muss auf das Verstehen des Algorithmus großen Wert gelegt werden: **Weniger rechnen - mehr verstehen!**

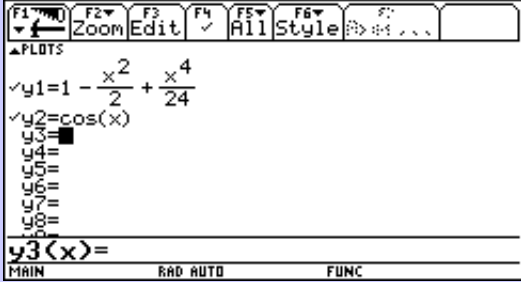
Weiterhin muss bei den Entscheidungen zwischen Hand- und Computerrechnung immer beachtet werden, ob es sich um langfristig zu sichernde Algorithmen handelt. Kurzfristig kann von Schüler mehr Handrechnungen erwartet werden, als bei länger zurückliegenden Algorithmen.

Diese Ansätze können auch in Klassenarbeits- und Klausuraufgaben berücksichtigt werden:

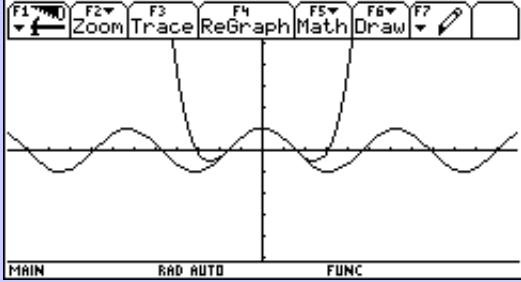
- Einfache Rechnungen von Hand durchführen,
- Kontrolle von Handrechnungen mit dem CAS,
- Handrechnungen mit dem CAS simulieren,
- Nachrechnen von vorgelegten CAS-Rechnungen auf Bildschirmausdrucken durch Handarbeit,
- komplizierte und aufwendige Rechnungen an das CAS geben.

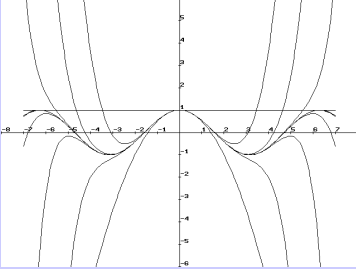
Ansätze finden lassen - Modellbildung

In verstärktem Umfang kann es nun auch in Klassenarbeiten / Klausuren um das Modellbilden aus einem Text heraus und das Bearbeiten der dann notwendigen Algorithmen mit einem CAS gehen. Anschließend erfolgt eine verständige Auswertung der vom CAS erzeugten Ergebnisse und ggf. eine Korrektur der Ansätze.



**Unendliche Reihen,
hier für cos(x)**





Aufgabe:

Erläutern Sie die obigen Bildschirmabdrucke. Formulieren Sie Aufgabenstellungen dazu.

Literatur und Homepage

Die Projektberichte zu den Berliner CAS-Projekten Sek.1 und Sek.2 können nachgelesen oder heruntergeladen werden auf www.snafu.de/~mirza oder bei BK-Teachware oder Texas Instruments bestellt werden.

- CAS-Projekt Sek.1: Heft 1 – Klasse 9, Heft 2 – Klasse 10, Heft 3: Klassenarbeiten
- CAS-Projekt Sek.2: Heft 1
- Parameterdarstellungen in der Sekundarstufe 1 (Schroedel-Verlag).
- Gleichungen (Schroedel-Verlag).
- Terme (Schroedel-Verlag).

Außerdem finden Sie auf der oben angegebenen Homepage Exemplare der „Berliner CAS-Berichte“ mit Beiträgen der an Projekten beteiligten Lehrerinnen sowie weitere Literatur zum CAS-Einsatz im Unterricht..