Bivariate chromatische Polynome in der Computer Algebra

Melanie Gerling

Universität Kassel
melanie.gerling@mathematik.uni-kassel.de

Einleitung

Wir beginnen mit einigen allgemeinen Bemerkungen.

Einleitung

Einige Anmerkungen...

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E.
- Unsere Graphen sind endlich, ungerichtet und ohne Mehrfachkanten und Schlingen.

Einleitung

Definition 1

In einem Graphen $G = (V, E)$ nennt man zwei Knoten $v_1, v_2 \in V$ adjazent zueinander, wenn $\{v_1, v_2\} \in E$ gilt. Nicht-adjazente Knoten nennen wir unabhängig voneinander. Entsprechend bezeichnen wir eine Menge $X \subseteq V$ als unabhängig, wenn ihre Elemente paarweise unabhängig voneinander sind.

Das univariate chromatische Polynom (Birkhoff 1912, siehe Read 1968)

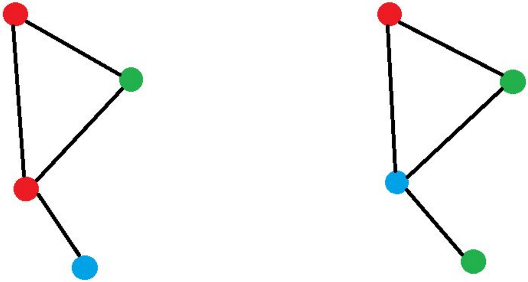
Definition 2

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine (echte) Knotenfärbung von G ist eine Abblidung $\phi : V \to \{1, 2, \ldots, y\}$, so dass für alle $e = \{u, v\} \in E$ die Ungleichung $\phi(u) \neq \phi(v)$ gilt.
Die Anzahl aller Knotenfärbungen von G in y Farben wird als $P(G; y)$ bezeichnet.

Das univariate chromatische Polynom (Birkhoff 1912, siehe Read 1968)

Beispiel 3

Die Knotenfärbung auf der linken Seite ist nicht zulässig, die Knotenfärbung auf der rechten Seite ist zulässig.



Das univariate chromatische Polynom (Birkhoff 1912, siehe Read 1968)

Beispiel 4

- *Die n Knoten des vollständigen Graphen K_n sind paarweise adjazent zueinander.*
- *Für den ersten Knoten haben wir alle y Farben zur Auswahl, für den zweiten aufgrund seiner Adjazenz zum ersten Knoten nur noch $y-1$ Möglichkeiten, für den dritten Knoten $y-2$ Farben und so weiter.*
- *Der Graph K_n besitzt das univariate chromatische Polynom*

$$P(K_n; y) \quad = \quad y(y-1)\dots(y-n+1) = y^{\underline{n}}\,.$$

Das bivariate chromatische Polynom (Dohmen, Pönitz und Tittmann 2003)

Definition 5

- *Sei $X = Y \cup Z$ mit $Y \cap Z = \emptyset$ die Menge aller verfügbaren Farben mit $x = |X|$ und $y = |Y|$. Eine verallgemeinerte echte Knotenfärbung von G ist eine Abbildung $\phi : V \to X$, so dass für alle $e = \{u, v\} \in E$ mit $\phi(u) \in Y$ und $\phi(v) \in Y$ die Relation $\phi(u) \neq \phi(v)$ gilt.*
- *Die Farben aus Y werden echt genannt und die Farben aus Z unecht.*
- *Die Anzahl aller verallgemeinerten echten Knotenfärbungen von G wird als $P(G; x, y)$ bezeichnet.*

Das bivariate chromatische Polynom (Dohmen, Pönitz und Tittmann 2003)

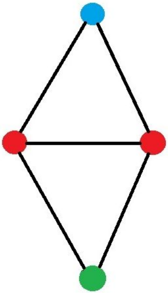
Einige Eigenschaften von $P(G; x, y)$ (Dohmen, Pönitz und Tittmann 2003)

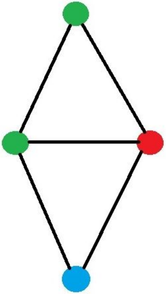
- $P(G; x, y)$ ist ein Polynom in x und y mit ganzen Koeffizienten.
- Falls $Y = \emptyset$, dann ist $P(G; x, 0) = x^{|V|}$.
- Falls $Z = \emptyset$, dann ist $P(G; y, y) = P(G; y)$, d. h. wir haben das univariate chromatische Polynom.

Das bivariate chromatische Polynom (Dohmen, Pönitz und Tittmann 2003)

Beispiel 6

Sei $Y = \{\text{Blau}, \text{Rot}\}$ und $Z = \{\text{Grün}\}$. Wir zeigen links eine unzulässige verallgemeinerte echte Knotenfärbung und rechts eine zulässige.





Das bivariate chromatische Polynom (Dohmen, Pönitz und Tittmann 2003)

Beispiel 7

Wir betrachten erneut den vollständigen Graphen K_n. Nach Dohmen, Pönitz und Tittmann (2003) besitzt er das bivariate chromatische Polynom

$$P(K_n; x, y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-y)^k \, y^{\underline{n-k}} .$$

Sei $n = 4$:

$$P(K_4; x, y) = x^4 - 6x^2y + 8xy - 6y + 3y^2 .$$

Inhalte

Einige Ergebnisse meiner Dissertation:

- Allgemeine Partitionsformeln
- Löschung von Sternen aus vollständigen Graphen
- Formeln für vollständige k-partite Graphen
- Formeln für Graphen mit vollständigen Trennern

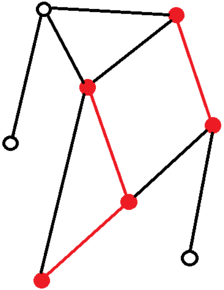
Definitionen

Definition 8

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Falls $F \subseteq E$, dann ist $G - F = (V, E \setminus F)$.

Definitionen

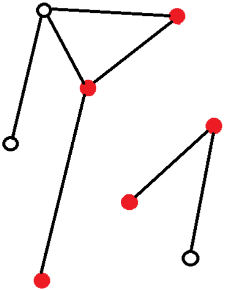
Sei $F \subseteq E$.



Wir sehen den Graphen G.

Definitionen

Sei $F \subseteq E$.



Wir sehen den Graphen $G - F$.

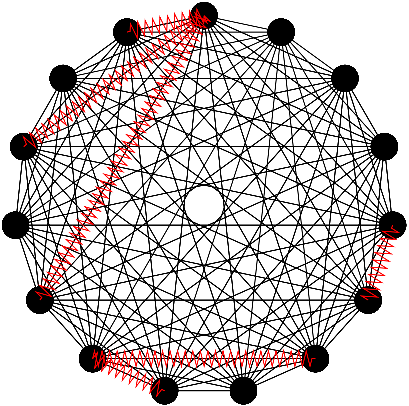
Definitionen

Einen Graphen mit der Knotenmenge $\{v_0, \ldots, v_m\}$ und der Kantenmenge $\{\{v_0, v_1\}, \ldots, \{v_0, v_m\}\}$ nennen wir einen Stern und schreiben dafür S_{m+1}.

Seien $t_1, \ldots, t_N$ ganze Zahlen. Wir erhalten einen Graphen $K_n - \sum_{m=1}^{N} t_m S_{m+1}$ aus einem Graphen K_n, wenn wir die Kanten von jeweils t_m Sternen S_{m+1} löschen, so dass ihre Knoten erhalten bleiben und die Knotenmengen der Sterne paarweise disjunkt sind.

Definitionen

Wir betrachten den Graphen $K_{15} - S_2 - S_3 - S_4$.



Bivariates Polynom

Satz 9

Sei $G = K_n - \sum_{m=1}^{N} t_m S_{m+1}$ mit $t_m \geq 0$ für alle $m \in \{1, \ldots, N\}$ und sei $N \geq 1$ die Anzahl aller Kanten eines Sterns mit maximaler Kantenanzahl. Zusätzlich sei $n \geq \sum_{m=0}^{N} t_m (m+1)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
P(G; x, y) \quad = \quad & \sum_{b_N=0}^{t_N} \binom{t_N}{b_N} N^{b_N} \sum_{b_{N-1}=0}^{t_{N-1}} \binom{t_{N-1}}{b_{N-1}} (N-1)^{b_{N-1}} \\
& \ldots \sum_{b_2=0}^{t_2} \binom{t_2}{b_2} 2^{b_2} \sum_{b_1=0}^{t_1} \binom{t_1}{b_1} 1^{b_1} \\
& \sum_{i=0}^{n-2b_N-\ldots-2b_1} \binom{n-2b_N-\ldots-2b_1}{i} \\
& (x-y)^i \, y^{\underline{n-b_N-\ldots-b_1-i}} \, .
\end{aligned}
$$

Bivariates Polynom

Beweis

Wir verwenden eine allgemeine Partitionsformel aus der Dissertation.

Praktische Untersuchung

Beispiel 10

Wir berechnen das bivariate chromatische Polynom des Graphen $K_{15} - S_2 - S_3 - S_4$ mit der Rekursionsformel nach Averbouch, Godlin und Makowsky ebenso wie mit unserer eigenen rekursionsfreien Gleichung.

Beispiel

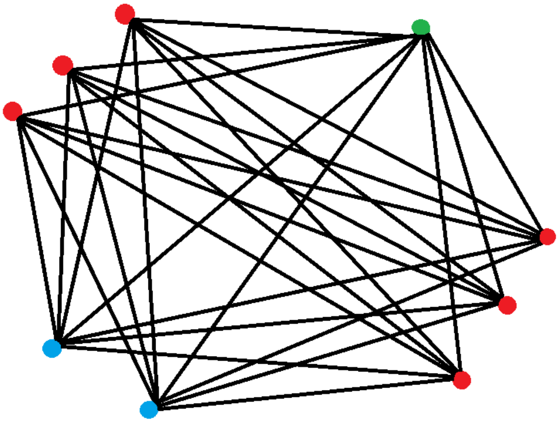
Definitionen

Für $r \geq 2$ nennen wir einen Graphen $G = (V, E)$ r-partit, wenn eine Partition $\Pi = \{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ von V existiert, so dass für jede Kante $e \in E$ die Relation $|e \cap X_i| \leq 1$ für alle $i = 1, \ldots, r$ gilt.

Ein r-partiter Graph G wird vollständig r-partit genannt, wenn für jedes Knotenpaar, dessen Knoten verschiedenen Blöcken angehören, diese zwei Knoten adjazent zueinander sind. Sei $n_i = |X_i|$ für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$. Dann bezeichnen wir den vollständig r-partiten Graphen G auch als $K_{n_1,\ldots,n_r}$.

Definitionen

Wir betrachten den Graphen $K_{1,2,3,3}$.



Bivariates Polynom

Theorem 11

Sei $G = (V, E)$ der vollständig k-partite Graph $K_{\underbrace{3,\ldots,3}_{k-mal}}$.

Dann erhalten wir

$$P(G; x, y) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \sum_{t=0}^{i} \binom{i}{t} 3^{i-t} \sum_{l=0}^{3k-2i-t} \binom{3k-2i-t}{l} (x-y)^{3k-2i-t-l} y^{\underline{i+l}} .$$

Beweis

Wir verwenden eine allgemeine Partitionsformel aus der Dissertation.

Bivariates Polynom

Theorem 12

Sei $t \geq 1$ und $n_i \geq 1$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Dann erhalten wir für den Graphen $K_{n_1,\ldots,n_t}$ die Rekursionsgleichung

$$P(K_{n_1,\ldots,n_t}; x, y) = \sum_{i=0}^{n_t} \binom{n_t}{i} (x-y)^i \sum_{j=0}^{n_t-i} S_{n_t-i,j} y^{\underline{j}} P(K_{n_1,\ldots,n_{t-1}}; x-j, y-j) \,.$$

Hierbei sei $S_{n_t-i,j}$ die Stirlingzahl der zweiten Art. Wir haben die Anfangsbedingung

$$P(\overline{K_{n_1}}; x, y) = x^{n_1} \,,$$

wobei $\overline{K_{n_1}}$ den leeren Graphen mit n_1 Knoten und ohne Kanten bezeichne. Der Beweis kann induktiv geführt werden.

Praktische Untersuchung

Beispiel 13

Wir betrachten den Spezialfall $n_1 = \ldots = n_t$ und wählen den Graphen $K_{3,3,3}$.Wir berechnen das bivariate chromatische Polynom mit der Rekursionsformel nach Averbouch, Godlin und Makowsky ebenso wie mit unserer eigenen Rekursionsgleichung.

Beispiel

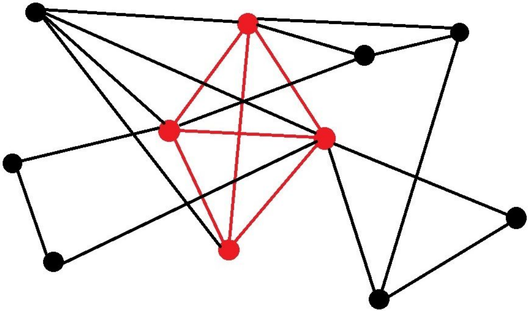
Vollständige Graphen als Trenner

Definition 14

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und für $W \subseteq V$ oder $W \subseteq E$ sei der Graph $G' = G[V \setminus W]$ oder $G' = (V, E \setminus W)$ unzusammenhängend. Dann nennen wir W einen Trenner in G.

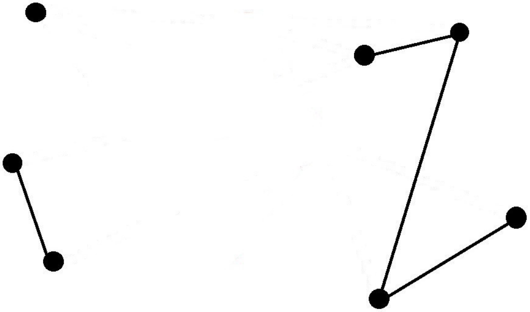
Vollständige Graphen als Trenner

G besitzt den Trenner K_4.



Vollständige Graphen als Trenner

G besitzt den Trenner K_4.



Vollständige Graphen als Trenner

Wir betrachten zuerst den univariaten Fall nach Read (1968), welcher sehr einfach ist.

Satz 15

Sei $G = G_1 \cup G_2$ ein Graph für zwei Graphen G_1 und G_2 mit $G_1 \cap G_2 = K_r$ für ein $r \geq 1$.
Dann gilt

$$P(G; y) \quad = \quad \frac{P(G_1; y)P(G_2; y)}{P(K_r; y)} \, .$$

Wir werden sehen, dass sich der bivariate Fall als viel komplexer gestaltet.

Vollständige Graphen als Trenner

Satz 16

Sei $G = (V, E) = \bigcup_{i=1}^{r} G_i$ mit $G_i \cap G_j = K_s$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ mit $i \neq j$ und $\bigcap_{i=1}^{r} G_i = K_s$. Für $v \in V$ sei $\Gamma(v)$ die Menge aller unabhängigen Teilmengen von V, welche v enthalten. Dann haben wir

$$P(G; x, y) = \sum_{k=0}^{s} (x-y)^{s-k}\, y^{\underline{k}} \sum_{\{v_1,\ldots,v_k\} \subseteq V(\bigcap_{i=1}^{r} G_i)} \; \sum_{(I_1,\ldots,I_k) \in \Gamma(v_1) \times \ldots \times \Gamma(v_k) \text{ mit } I_l \cap I_m = \emptyset \text{ für } l \neq m} \prod_{i=1}^{r} P\Big(G_i - \bigcap_{j=1}^{r} G_j - \bigcup_{t=1}^{k} I_t; x-k, y-k\Big) .$$

Vollständige Graphen als Trenner

Beweis

Die Behauptung folgt direkt aus einer allgemeinen Partitionsformel aus der Dissertation.

Bemerkung 17

- *Wie wir sehen, wächst die Rechenkomplexität zusammen mit der Anzahl der Summanden.*
- *Daher ist es sinnvoll, nach so kleinen Trennern wie möglich zu suchen.*

Literatur

- Averbouch I., Godlin B. und Makowsky J. A.: A most general edge elimination polynomial. In: *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, 5344, *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 2008, S. 31-42.
- Birkhoff G. D.: A determinant formula for the number of ways of coloring an map, *Ann. of Math. (2)*, 14(1), 1912, S. 42-46.
- Dohmen K., Pönitz A. und Tittmann P.: A new two-variable generalization of the chromatic polynomial, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 6, 2003, S. 69-90.
- Read R. C.: An introduction to chromatic polynomials, *J. Combin. Theory Ser. B*, 4, 1968, S. 52-71.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Partitionsformeln

Satz 18

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $\Pi_I(G[X])$ die Menge aller unabhängigen Partitionen von $X \subseteq V$ und $n = |V|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P(G; x, y) &= \sum_{W \subseteq V} (x-y)^{|W|} \sum_{\pi \in \Pi_I(G[V \setminus W])} y^{\underline{|\pi|}} \\ &= \sum_{i=0}^{n} (x-y)^{n-i} \sum_{X \in \mathcal{P}_i(V)} \sum_{\pi \in \Pi_I(G[X])} y^{\underline{|\pi|}} . \end{aligned}$$

Partitionsformeln

Satz 19

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $\Pi_I(G)$ die Menge aller unabhängigen Partitionen von V. Dann erhalten wir

$$P(G; x, y) = \sum_{\pi \in \Pi_I(G)} \sum_{i=0}^{|\{X \in \pi|\ |X|=1\}|} \binom{|\{X \in \pi|\ |X| = 1\}|}{i} (x-y)^i \, y^{\underline{|\pi|-i}} \, .$$

Zurück zu Satz 9.

Satz 12

Beweis

- Der Graph $\overline{K_{n_t}}$ mit n_t Knoten und ohne Kanten ist ein Teilgraph des Graphen $K_{n_1,\dots,n_t}$, so dass jeder Knoten von $\overline{K_{n_t}}$ adjazent zu jedem Knoten im verbleibenden Graphen $K_{n_1,\dots,n_{t-1}}$ ist.
- Wir färben jeweils i Knoten aus $V(\overline{K_{n_t}})$ unecht mit $i \in \{0, \dots, n_t\}$.
- Die übrigen $n_t - i$ Knoten sind echt gefärbt.
- Aufgrund ihrer paarweisen Unabhängigkeit dürfen wir sie beliebig partitionieren und färben jeden Block paarweise verschieden.
- Wir können 0 bis $n_t - i$ Blöcke erhalten.

Satz 12

Beweis

- Weil jeder Knoten aus $\overline{K_{n_t}}$ adjazent zu jedem Knoten aus $K_{n_1,\ldots,n_{t-1}}$ ist, dürfen wir nicht mehr die für den Graphen $\overline{K_{n_t}}$ verwendeten echten Farben für den Graphen $K_{n_1,\ldots,n_{t-1}}$ benutzen.

Zurück zu Satz 12