CA-gestützte Lehre in großen Studiengängen

STACK in der Linearen Algebra

Hendrikje Schmidtpott

11. Mai 2017

Die Herausforderung

Wir betreiben Lehrexport für etwa 400 Elektrotechnik- und Informatikstudierende, Themen: Lineare Algebra, Analysis und Diskrete Strukturen.

- Mathematik ist nur “notwendiges Übel”
- Hausaufgaben werden abgeschrieben
- immenser Aufwand bei der Korrektur der Hausaufgaben
- rechnerische Fähigkeiten fehlen

Lösungsansatz

Neben den handschriftlichen Abgaben sollen auch elektronische Aufgaben bearbeitet werden. Diese sollen sowohl Hausaufgaben ersetzen als auch als zusätzliches Übungswerkzeug dienen.

Wir nutzen bereits Moodle zur Kommunikation mit den Studierenden, es liegt nahe, dies auch zur Aufgabenerstellung zu nutzen.

Moodle selbst liefert Testumgebungen. Mit dem STACK-plugin können Eingaben der Studenten durch ein Computeralgebrasystem ausgewertet werden.

Was ist STACK?

- kurz für System for Teaching and Assesment using a Computer Algebra Kernel
- basiert auf Maxima
- ist OpenSource, entwickelt an der Universität Birmingham
- akzeptiert numerische Antworten, Terme, Dropdown oder Bulletlisten
- kann randomisierte Aufgaben stellen
- kann mit den Antworten der Studenten weiterarbeiten
- gibt differenziertes Feedback
- Ausdrücke wie int, diff etc. können natürlich auch in den Antworten ausgeschlossen werden
- verschiedene Test auf das korrekte Ergebnis sind möglich z.B. gleicher Ausdruck, algebraische Äquivalenz, etc.

frontend

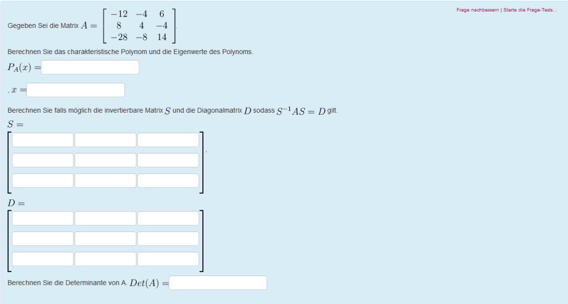


Abbildung: Studentenansicht einer Testfrage

frontend

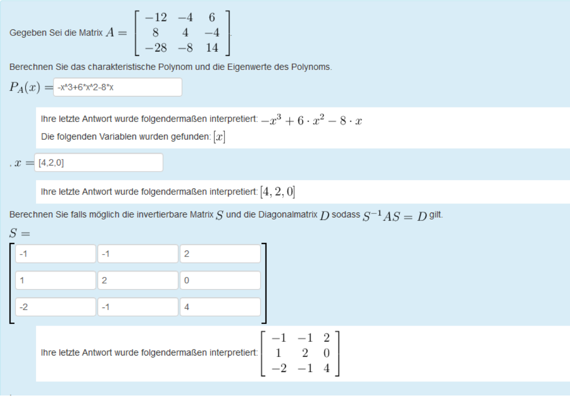


Abbildung: Eingaben werden sofort auf Ihre Gültigkeit überprüft

backend

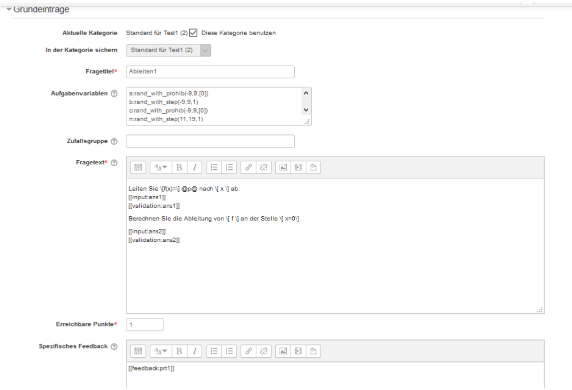


Abbildung: Variablen und Funktionendeklaration, Aufgabenstellung

backend

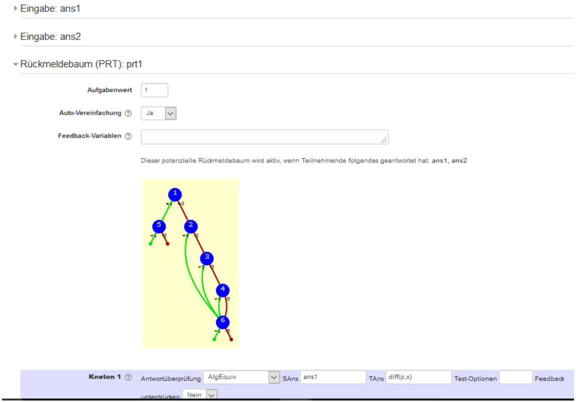


Abbildung: Antworspezifikation und Feedbackbaum

Frage 1: Geben Sie die Ableitung von p(x) an, Frage 2: Werten Sie diese an Stelle $x_0 = 0$ aus.

feedback

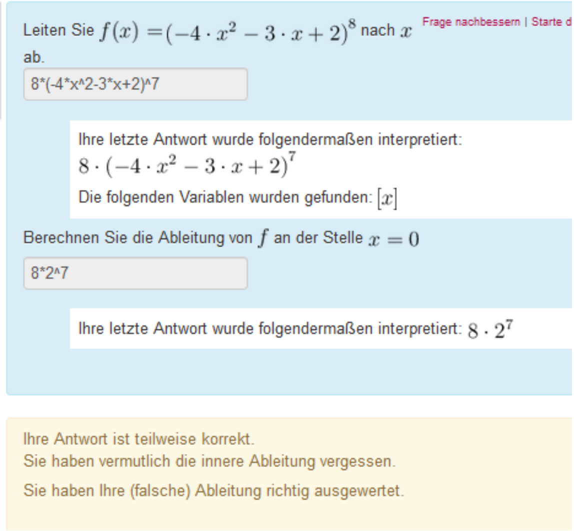


Abbildung: entlang des Feedbackbaums

typische Aufgaben

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

b) Berechnen Sie alle Eigenwerte zu A

c) Bestimmen Sie nun alle Basen der zugehörigen Eigenräume von A. Ist die Matrix A diagonalisierbar?

d) Betrachten Sie nun die Matrix $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

Berechnen Sie $\det(B)$. Ist die lineare Abbildung $\mathcal{L}_B$ mit der darstellenden Matrix B surjektiv?

typische Aufgaben

- Ermitteln Sie in kartesischen Koordianten und Polarkoordinaten die Lösung der Gleichung

$$(1 + i\sqrt{3})\, z = \frac{12}{3 + i\sqrt{3}}$$

  und berechnen Sie die sechste Potenz dieser Lösung.
- Geben Sie alle Lösungen z der Gleichung an: $z^3 = 2^{\frac{7}{2}} \cdot \mathrm{i} - 2^{\frac{7}{2}}$
- Durch die Punkte $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sei eine Ebene E gegeben. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $S = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zur Ebene E.

brauchbare Matrizen konstuieren:

Für einen Großteil der Aufgabenstellungen in der Linearen Algebra ist die Erstellung von Matrizen mit bestimmten Eigenschaften wichtig.

$A \in GL(3, \mathbb{R})$: $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ mit $d_1, d_2, d_3 \neq 0$ ist definitiv aus $GL(3, R)$.

Multiplikation mit einer Matrix $B \in Mat(3 \times 3)$ liefert dann

$$A = B.D = \begin{pmatrix} s_1 d_1 & t_1 d_2 & u_1 d_3 \\ s_2 d_1 & t_2 d_2 & u_2 d_3 \\ s_3 d_3 & t_3 d_2 & u_3 d_3 \end{pmatrix}.$$

Für vollen Rang von B bzw. A müssen Einschränkungen getroffen werden:

$$s_1 \neq 0,\ t_2 \neq \frac{s_2 t_1}{s_1} \text{ und } u_3 \neq \frac{(s_1 t_3 - s_3 t_1) u_2 + (s_3 t_2 - s_2 t_3) u_1}{s_1 t_2 - s_2 t_1}.$$

Alle weiteren Parameter dürfen zufällig bestimmt werden.

brauchbare Matrizen konstuieren:

Analog können natürlich größere Matrizen konstruiert werden oder auch Matrizen von mit anderem Rang. Rang 2 z.B. mit

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & d_3 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } d_1, d_2, d_3 \neq 0.$$

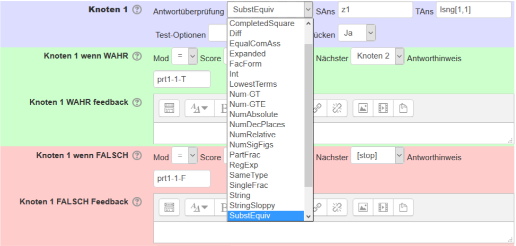
Durch die Kontrolle der randomisierten Matrizen können Aufgaben zu Gleichungssystemen, Geometrie, Eigenwerten und Eigenvektoren etc. zuverlässig konstruiert werden.

Aufgabenkonstruktion

Aufgabenstellung: zu gegebener Matrix A sollen charakteristisches Polynom, Eigenwerte und die zugehörige Matrix S aus Eigenvektoren ermittelt werden.

- erstelle zufällige reguläre Matrix S
- bestimme $d = Det(S)$ und gebe Eigenwerte vor: $\{d\lambda_1, d\lambda_2, ...\}$
- Berechne $A = S.D.S^{-1}$ aus der diagonalisierten Matrix D und S

Testroutinen



STACK bietet bereits viele sinnvolle Tests um die Antworten der Studenten zu überprüfen an.
Sonst können Musterlösung und Studentenlösung durch Funktionen manipuliert werden, so dass eine eigene Testroutine verwendet werden kann.
Studentenlösungen können sich ebenfalls für Feedback manipulieren lassen: “Ihre Vektoren sind nicht linear unabhängig, v_3 lässt sich durch v_1 und v_2 wie folgt darstellen: $v_3 = sv_1 + tv_2$.”

Fazit

- Prinzipiell sind viele Aufgabentypen denkbar
- *fast* alles was mit MAXIMA möglich ist, funktioniert auch in STACK
- jeder Student bekommt eigene Aufgaben
- großer Arbeitsaufwand im Vorfeld um Fehler und unterschiedlich schwere Aufgaben auszuschließen.
- Folgefehler in mehrstufigen Aufgaben können leicht berücksichtigt werden.
- Zwischenschritte nur begrenzt überprüfbar.
- wahrscheinlich niedrige Hemmschwelle ein Computeralgebrasystem zur Hilfe zu nehmen, wenn man sowieso schon online ist