Die Berechnung tropischer Varietäten mittels affiner Hyperebenenschnitte

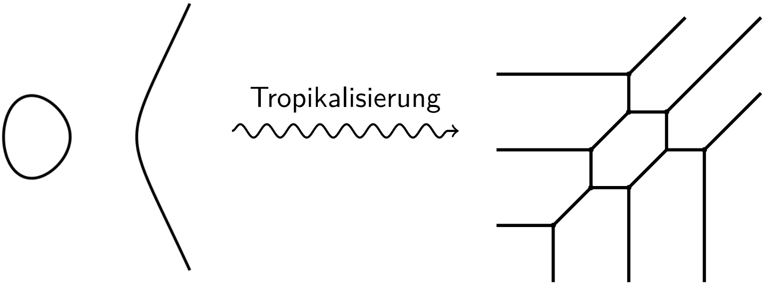
Yue Ren
(joint work with Tommy Hofmann)

Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig

5. Mai 2017

Tropische Geometrie (in Hinblick auf alg. Geometrie)

- Studiere Objekte der algebraischen Geometrie über bewerteten Körpern mittels diskreter Geometrie.



Notation

Wir fixieren für diesen Vortrag:

- Den Körper der komplexen Puiseux Reihen

$$K = \mathbb{C}\{\{t\}\} = \Big\{ \sum_{i=k_0}^{\infty} a_{i/k} \cdot t^{i/k} \;\Big|\; k \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ k_0 \in \mathbb{Z},\ a_{i/k} \in \mathbb{C} \Big\}$$

  mit seiner natürlichen Bewertung

$$\nu\colon K^* \longrightarrow \mathbb{R},\ \sum_{i=k_0}^{\infty} a_{i/k} \cdot t^{i/k} \mapsto \min\Big\{ \frac{i}{k} \;\Big|\; a_{i/k} \neq 0 \Big\}.$$

- Einen multivariaten Polynomring $K[x] = K[x_1, \ldots, x_n]$.
- Wir bezeichnen mit ν ebenfalls die komponentenweise Bewertung $(K^*)^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Tropikalisierung affiner Varietäten

Definition und Theorem

Sei $I \trianglelefteq K[x]$ ein Ideal. Wir nennen

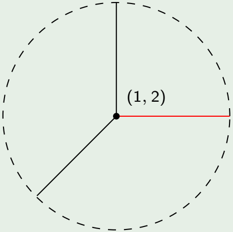
$$\mathrm{Trop}(I) := \overline{\nu(V(I) \cap (K^*)^n)} \subseteq \mathbb{R}^n$$

die tropische Varietät von I. Es ist der Träger eines ausbalancierten polyhedralen Komplexes gleicher Dimension.

Beispiel (tropische Linie)

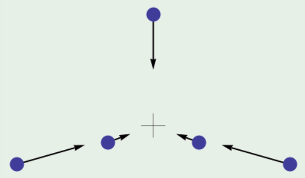
$$k \in \mathbb{Q}_{>0}$$

$$\begin{array}{ccc} V(t^{-1}x + t^{-2}y + 1) & \ni & (t^{k+1}, t^{k+2} - t^2) \\ \downarrow \nu & & \downarrow \\ \mathrm{Trop}(I) & \ni & (k+1, 2) \end{array}$$



Tropikalisierung affiner Varietäten

Beispiel (Hampton-Jensen, 2011)



Problemstellung

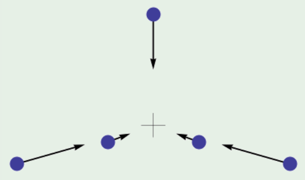
Wie viele zentrale Konfigurationen existieren (bis auf Symmetrie)?

zentrale Konfigurationen im N-Körper Problem

$$I := \left\langle \lambda(c - p_j) - \sum_{i \neq j} \frac{m_i(p_i - p_j)}{r_{ij}^3} \right\rangle$$

Tropikalisierung affiner Varietäten

Beispiel (Hampton-Jensen, 2011)



Problemstellung

Wie viele zentrale Konfigurationen existieren (bis auf Symmetrie)?

zentrale Konfigurationen im N-Körper Problem

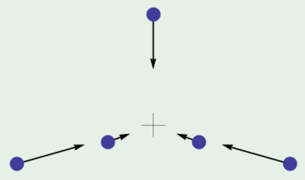
$$I := \left\langle \lambda(c - p_j) - \textstyle\sum_{i \neq j} \frac{m_i(p_i - p_j)}{r_{ij}^3} \right\rangle$$

$$\Cup$$

$$f_1, \ldots, f_k \qquad \text{mit} \qquad \dim\left(\textstyle\bigcap_{i=1}^k \mathrm{Trop}(f_i) \right) = 0$$

Tropikalisierung affiner Varietäten

Beispiel (Hampton-Jensen, 2011)



Problemstellung

Wie viele zentrale Konfigurationen existieren (bis auf Symmetrie)?

Antwort: Endlich viele für N=4,5!

zentrale Konfigurationen im N-Körper Problem

$$I := \left\langle \lambda(c - p_j) - \textstyle\sum_{i\neq j} \frac{m_i(p_i - p_j)}{r_{ij}^3} \right\rangle \qquad\qquad \dim(I) = 0$$

$$\rotatebox{90}{$\in$} \qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$$

$$f_1, \ldots, f_k \quad \text{mit} \quad \dim\Big(\textstyle\bigcap_{i=1}^k \mathrm{Trop}(f_i) \Big) = 0$$

$$\rotatebox{90}{$\subseteq$}$$

$$\mathrm{Trop}(I)$$

Tropikalisierung affiner Varietäten

Definition und Theorem

Sei $I \trianglelefteq K[x]$ ein Ideal. Wir nennen

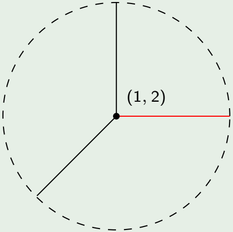
$$\mathrm{Trop}(I) := \overline{\nu(V(I) \cap (K^*)^n)} \subseteq \mathbb{R}^n$$

die tropische Varietät von I. Es ist der Träger eines ausbalancierten polyhedralen Komplexes gleicher Dimension.

Beispiel (tropische Linie)

$$k \in \mathbb{Q}_{>0}$$

$$\begin{array}{ccc} V(t^{-1}x + t^{-2}y + 1) & \ni & (t^{k+1}, t^{k+2} - t^2) \\ \downarrow \nu & & \downarrow \\ \mathrm{Trop}(I) & \ni & (k+1, 2) \end{array}$$



Tropikalisierung polynomieller Ideale

Definition

$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha \cdot x^\alpha \in K[x]$ Polynom, $I \trianglelefteq K[x]$ Ideal, $w \in \mathbb{R}^n$ Gewicht

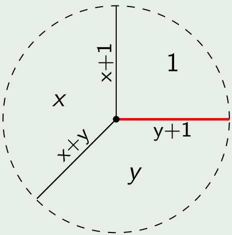
$$\mathrm{in}_w(f) = \sum_{w\cdot\alpha+\nu(c_\alpha) \text{ min.}} \mathrm{in}(c_\alpha) \cdot x^\alpha \in \mathbb{C}[x] \qquad \text{Initialform}$$

wobei $\mathrm{in}(c_\alpha)$ den Koeffizienten der niedrigsten t-Potenz bezeichnet.

$$\mathrm{in}_w(I) = \langle \mathrm{in}_w(f) \mid f \in I \rangle \subseteq \mathbb{C}[x] \qquad \text{Initialideal}$$

Beispiel (tropische Linie)

w	$t^{-1}x$	$+ t^{-2}y$	$+ 1$
$(1,2)$	0	0	0
$(k+1,2)$	k	0	0



Definition und Proposition

Nur für $I \subseteq K[x]$ *homogen*

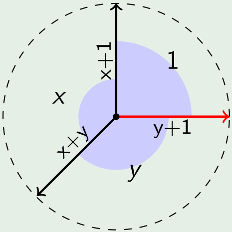
$$C_w(I) = \overline{\{w' \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{in}_{w'}(I) = \mathrm{in}_w(I)\}} \qquad \textit{Gröbnerpolyeder}$$

$$\Sigma(I) = \{C_w(I) \mid w \in \mathbb{R}^n\} \qquad \textit{Gröbnerkomplex}$$

Und es existieren nur endlich viele Gröbnerpolyeder.

Beispiel (tropische Linie)

w	$t^{-1}x$	$+\, t^{-2}y$	$+\, 1$
$(1,2)$	0	0	0
$(k+1,2)$	k	0	0



Berechnung tropischer Varietäten

Algorithmus (Tropische Varietäten, BJSST 2007)

Finde $w \in \mathrm{Trop}(I)$
Konstruiere $C_w(I)$ *und setze* $\mathcal{T} := C_w(I)$
repeat
    Wähle $u \in \partial\mathcal{T}$
    Berechne $\mathrm{Trop}(\mathrm{in}_u(I)) = \bigcup_{i=1}^k v_i \cdot \mathbb{R}_{\geq 0}$
    Konstruiere $C_{u+\varepsilon\cdot v_i}(I)$ *und setze*

$$\mathcal{T} := \mathcal{T} \cup \left(\bigcup_{i=1}^k C_{u+\varepsilon v_i}(I)\right)$$

until $\partial\mathcal{T} = \emptyset$

Berechnung tropischer Varietäten

Algorithmus (Tropische Varietäten, BJSST 2007)

1: *Finde* $w \in \mathrm{Trop}(I)$
2: *Konstruiere* $C_w(I)$ *und setze* $\mathcal{T} := C_w(I)$
3: ***repeat***
4: *Wähle* $u \in \partial\mathcal{T}$
5: *Berechne* $\mathrm{Trop}(\mathrm{in}_u(I)) = \bigcup_{i=1}^k v_i \cdot \mathbb{R}_{\geq 0}$
6: *Konstruiere* $C_{u+\varepsilon\cdot v_i}(I)$ *und setze*

$$\mathcal{T} := \mathcal{T} \cup \left(\bigcup_{i=1}^k C_{u+\varepsilon v_i}(I)\right)$$

7: ***until*** $\partial\mathcal{T} = \emptyset$

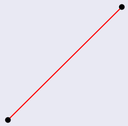
Berechnung tropischer Varietäten

Algorithmus (Tropische Varietäten, BJSST 2007)

Finde $w \in \mathrm{Trop}(I)$
Konstruiere $C_w(I)$ *und setze* $\mathcal{T} := C_w(I)$
repeat
    Wähle $u \in \partial\mathcal{T}$
    Berechne $\mathrm{Trop}(\mathrm{in}_u(I)) = \bigcup_{i=1}^k v_i \cdot \mathbb{R}_{\geq 0}$
    Konstruiere $C_{u+\varepsilon \cdot v_i}(I)$ *und setze*

$$\mathcal{T} := \mathcal{T} \cup \left(\bigcup_{i=1}^k C_{u+\varepsilon v_i}(I) \right)$$

until $\partial\mathcal{T} = \emptyset$



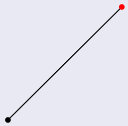
Berechnung tropischer Varietäten

Algorithmus (Tropische Varietäten, BJSST 2007)

1: *Finde* $w \in \mathrm{Trop}(I)$
2: *Konstruiere* $C_w(I)$ *und setze* $\mathcal{T} := C_w(I)$
3: ***repeat***
4: *Wähle* $u \in \partial\mathcal{T}$
5: *Berechne* $\mathrm{Trop}(\mathrm{in}_u(I)) = \bigcup_{i=1}^k v_i \cdot \mathbb{R}_{\geq 0}$
6: *Konstruiere* $C_{u+\varepsilon\cdot v_i}(I)$ *und setze*

$$\mathcal{T} := \mathcal{T} \cup \left(\bigcup_{i=1}^k C_{u+\varepsilon v_i}(I)\right)$$

7: ***until*** $\partial\mathcal{T} = \emptyset$



Algorithmus (Tropische Varietäten, BJSST 2007)

Finde $w \in \mathrm{Trop}(I)$

Konstruiere $C_w(I)$ *und setze* $\mathcal{T} := C_w(I)$

repeat

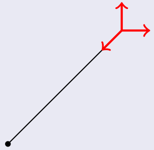
  Wähle $u \in \partial\mathcal{T}$

  Berechne $\mathrm{Trop}(\mathrm{in}_u(I)) = \bigcup_{i=1}^k v_i \cdot \mathbb{R}_{\geq 0}$

  Konstruiere $C_{u+\varepsilon\cdot v_i}(I)$ *und setze*

$$\mathcal{T} := \mathcal{T} \cup \left(\bigcup_{i=1}^k C_{u+\varepsilon v_i}(I) \right)$$

until $\partial\mathcal{T} = \emptyset$

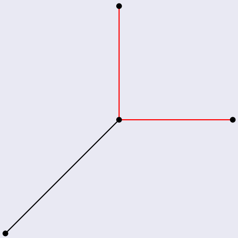


Algorithmus (Tropische Varietäten, BJSST 2007)

Finde $w \in \mathrm{Trop}(I)$
Konstruiere $C_w(I)$ *und setze* $\mathcal{T} := C_w(I)$
repeat
    Wähle $u \in \partial\mathcal{T}$
    Berechne $\mathrm{Trop}(\mathrm{in}_u(I)) = \bigcup_{i=1}^k v_i \cdot \mathbb{R}_{\geq 0}$
    Konstruiere $C_{u+\varepsilon\cdot v_i}(I)$ *und setze*

$$\mathcal{T} := \mathcal{T} \cup \left(\bigcup_{i=1}^k C_{u+\varepsilon v_i}(I)\right)$$

until $\partial\mathcal{T} = \emptyset$



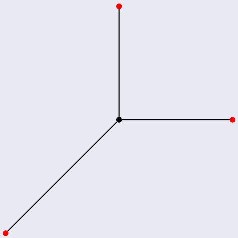
Berechnung tropischer Varietäten

Algorithmus (Tropische Varietäten, BJSST 2007)

Finde $w \in \mathrm{Trop}(I)$
Konstruiere $C_w(I)$ *und setze* $\mathcal{T} := C_w(I)$
repeat
    Wähle $u \in \partial\mathcal{T}$
    Berechne $\mathrm{Trop}(\mathrm{in}_u(I)) = \bigcup_{i=1}^k v_i \cdot \mathbb{R}_{\geq 0}$
    Konstruiere $C_{u+\varepsilon\cdot v_i}(I)$ *und setze*

$$\mathcal{T} := \mathcal{T} \cup \left(\bigcup_{i=1}^k C_{u+\varepsilon v_i}(I) \right)$$

until $\partial\mathcal{T} = \emptyset$



Algorithmus (Tropische Varietäten, BJSST 2007)

Finde $w \in \mathrm{Trop}(I)$

Konstruiere $C_w(I)$ *und setze* $\mathcal{T} := C_w(I)$

repeat

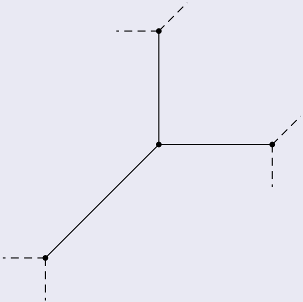
  Wähle $u \in \partial\mathcal{T}$

  Berechne $\mathrm{Trop}(\mathrm{in}_u(I)) = \bigcup_{i=1}^k v_i \cdot \mathbb{R}_{\geq 0}$

  Konstruiere $C_{u+\varepsilon \cdot v_i}(I)$ *und setze*

$$\mathcal{T} := \mathcal{T} \cup \left(\bigcup_{i=1}^k C_{u+\varepsilon v_i}(I)\right)$$

until $\partial\mathcal{T} = \emptyset$



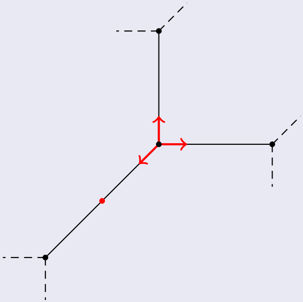
Berechnung tropischer Varietäten

Algorithmus (Tropische Varietäten, BJSST 2007)

1: *Finde* $w \in \mathrm{Trop}(I)$
2: *Konstruiere* $C_w(I)$ *und setze* $\mathcal{T} := C_w(I)$
3: ***repeat***
4: *Wähle* $u \in \partial\mathcal{T}$
5: *Berechne* $\mathrm{Trop}(\mathrm{in}_u(I)) = \bigcup_{i=1}^k v_i \cdot \mathbb{R}_{\geq 0}$
6: *Konstruiere* $C_{u+\varepsilon\cdot v_i}(I)$ *und setze*

$$\mathcal{T} := \mathcal{T} \cup \left(\bigcup_{i=1}^k C_{u+\varepsilon v_i}(I)\right)$$

7: ***until*** $\partial\mathcal{T} = \emptyset$



Bottlenecks

1. *Finde* $w \in \mathrm{Trop}(I)$.
2. *Berechne* $\mathrm{Trop}(J)$*, wobei* $\mathrm{Trop}(J)$ *ein eindimensionaler Fächer.*

Berechnung tropischer Varietäten

Algorithmus (Tropische Varietäten, BJSST 2007)

1: *Finde* $w \in \mathrm{Trop}(I)$

2: *Konstruiere* $C_w(I)$ *und setze* $\mathcal{T} := C_w(I)$

3: ***repeat***

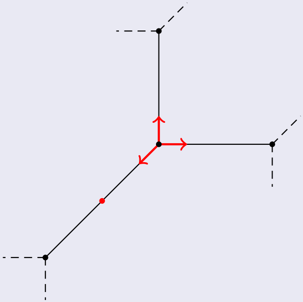
4: *Wähle* $u \in \partial\mathcal{T}$

5: *Berechne* $\mathrm{Trop}(\mathrm{in}_u(I)) = \bigcup_{i=1}^k v_i \cdot \mathbb{R}_{\geq 0}$

6: *Konstruiere* $C_{u+\varepsilon\cdot v_i}(I)$ *und setze*

$$\mathcal{T} := \mathcal{T} \cup \left(\bigcup_{i=1}^k C_{u+\varepsilon v_i}(I)\right)$$

7: ***until*** $\partial\mathcal{T} = \emptyset$



Bottlenecks

1. *Finde* $w \in \mathrm{Trop}(I) = \nu(X \cap (K^*)^n)$.
2. *Berechne* $\mathrm{Trop}(J)$, *wobei* $\mathrm{Trop}(J)$ *ein eindimensionaler Fächer.*

Berechnung von Punkten auf tropischen Varietäten

Algorithmus (Erster Schritt: Reduziere zu Dimension 0)

$I \trianglelefteq K[x_1,\ldots,x_n]$ $\quad$ I *prim*, $\dim(I) = d$, $V(I) \cap (K^*)^n \neq \emptyset$

Algorithmus (Erster Schritt: Reduziere zu Dimension 0)

$I \trianglelefteq K[x_1,\ldots,x_n]$ *I prim*, $\dim(I)=d$, $V(I)\cap(K^*)^n\neq\emptyset$

1. Bestimme unabh. Menge, z.B. $I\cap K[x_1,\ldots,x_d]=\langle 0\rangle$

Berechnung von Punkten auf tropischen Varietäten

Algorithmus (Erster Schritt: Reduziere zu Dimension 0)

$I \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$ $\qquad$ *I prim,* $\dim(I) = d$, $V(I) \cap (K^*)^n \neq \emptyset$

$$\downarrow \quad x_i \mapsto c_i$$

1. Bestimme unabh. Menge, z.B. $I \cap K[x_1, \ldots, x_d] = \langle 0 \rangle$

2. Wähle $(c_1, \ldots, c_d) \in (K^*)^d$

$I^0 \trianglelefteq K[x_{d+1}, \ldots, x_n]$

Algorithmus (Erster Schritt: Reduziere zu Dimension 0)

$I \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$ $\quad$ *I prim,* $\dim(I) = d, \; V(I) \cap (K^*)^n \neq \emptyset$

$x_i \mapsto c_i$

1. Bestimme unabh. Menge, z.B. $I \cap K[x_1, \ldots, x_d] = \langle 0 \rangle$

2. Wähle $(c_1, \ldots, c_d) \in (K^*)^d$ *generisch*

$I^0 \trianglelefteq K[x_{d+1}, \ldots, x_n]$ $\quad$ $\dim(I^0) = 0, \; V(I^0) \subseteq (K^*)^{n-d}$

Berechnung von Punkten auf tropischen Varietäten

Algorithmus (Erster Schritt: Reduziere zu Dimension 0)

$I \trianglelefteq K[x_1,\ldots,x_n]$ $\quad$ *I prim*, $\dim(I)=d$, $V(I)\cap(K^*)^n\neq\emptyset$

$x_i \mapsto c_i$

1. Bestimme unabh. Menge, z.B. $I\cap K[x_1,\ldots,x_d]=\langle 0\rangle$

2. Wähle $(c_1,\ldots,c_d)\in(K^*)^d$ *generisch*

$I^0 \trianglelefteq K[x_{d+1},\ldots,x_n]$ $\quad$ $\dim(I^0)=0$, $V(I^0)\subseteq(K^*)^{n-d}$

3. Berechne einen Punkt $w\in\mathrm{Trop}(I^0)\subseteq\mathbb{R}^{n-d}$

return $(\nu(c),w)\in\mathbb{R}^n$

Berechnung von Punkten auf tropischen Varietäten

Proposition (Dreieckszerlegung, Lazard 1992)

Wir sagen $F = \{f_1, \dots, f_n\} \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ *hat eine Dreiecksgestalt, falls*

$$f_i \in K[x_1, \dots, x_i] \setminus K[x_1, \dots, x_{i-1}] \text{ für alle } i = 1, \dots, n.$$

Wenn $\dim(I) = 0$*, dann existieren Mengen* $F_1, \dots, F_k$ *mit Dreiecksgestalt, so dass*

$$\sqrt{I} = \langle F_1 \rangle \cap \dots \cap \langle F_k \rangle.$$

Insbesondere $\mathrm{Trop}(I) = \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Trop}(F_i)$.

Beispiel ($\mathrm{Cyclic}_5 \subseteq K[a, b, c, d, e]$)

$$\sqrt{\mathrm{Cyclic}_5} = \left\langle \begin{matrix} a^5 - 1, \\ b - a, \\ c^2 + 3ca + a^2, \\ d + c + 3a, \\ e - a \end{matrix} \right\rangle \cap \left\langle \begin{matrix} a^5 - 1, \\ b - a, \\ c - a, \\ d^2 + 3da + a^2, \\ e + d + 3a \end{matrix} \right\rangle \cap \quad \dots$$

Algorithmus (Zweiter Schritt: Reduzieren auf Dreiecksgestalt)

$I \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$ *I prim*, $\dim(I) = d$, $V(I) \cap (K^*)^n \neq \emptyset$

$x_i \mapsto c_i$

1. Bestimme unabh. Menge, z.B. $I \cap K[x_1, \ldots, x_d] = \langle 0 \rangle$

2. Wähle $(c_1, \ldots, c_d) \in (K^*)^d$ *generisch*

$I^0 \trianglelefteq K[x_{d+1}, \ldots, x_n]$ $\dim(I^0) = 0$, $V(I^0) \subseteq (K^*)^{n-d}$

3. Berechne einen Punkt $w \in \mathrm{Trop}(I^0) \subseteq \mathbb{R}^{n-d}$

return $(\nu(c), w) \in \mathbb{R}^n$

Berechnung von Punkten auf tropischen Varietäten

Algorithmus (Zweiter Schritt: Reduzieren auf Dreiecksgestalt)

$I \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$ $\quad$ *I prim,* $\dim(I) = d$, $V(I) \cap (K^*)^n \neq \emptyset$

$x_i \mapsto c_i$

1. Bestimme unabh. Menge, z.B. $I \cap K[x_1, \ldots, x_d] = \langle 0 \rangle$

2. Wähle $(c_1, \ldots, c_d) \in (K^*)^d$ *generisch*

$I^0 \trianglelefteq K[x_{d+1}, \ldots, x_n]$ $\quad$ $\dim(I^0) = 0$, $V(I^0) \subseteq (K^*)^{n-d}$

3. Berechne eine Dreieckszerlegung

$$\sqrt{I^0} = \langle F_1 \rangle \cap \ldots \cap \langle F_k \rangle$$

Algorithmus (Zweiter Schritt: Reduzieren auf Dreiecksgestalt)

$I \trianglelefteq K[x_1, \ldots, x_n]$ *I prim*, $\dim(I) = d$, $V(I) \cap (K^*)^n \neq \emptyset$

$x_i \mapsto c_i$

1. Bestimme unabh. Menge, z.B. $I \cap K[x_1, \ldots, x_d] = \langle 0 \rangle$

2. Wähle $(c_1, \ldots, c_d) \in (K^*)^d$ *generisch*

$I^0 \trianglelefteq K[x_{d+1}, \ldots, x_n]$ $\dim(I^0) = 0$, $V(I^0) \subseteq (K^*)^{n-d}$

3. Berechne eine Dreieckszerlegung

$$\sqrt{I^0} = \langle F_1 \rangle \cap \ldots \cap \langle F_k \rangle$$

4. Bestimme ein $w \in \mathrm{Trop}(F_i) \subseteq \mathbb{R}^{n-d}$ *für irgendein* $i = 1, \ldots, k$

return $(\nu(c), w) \in \mathbb{R}^n$

Tropische Varietäten von Mengen mit Dreiecksgestalt

Proposition (Dritter Schritt: Newtonpolygone)

Das Newtonpolygon *eines univariaten Polynoms* $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i x^i \in K[x]$ *ist gegeben durch*

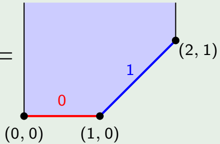
$$\Delta(f) = \mathrm{Conv}\Big(\{(i, \nu(c_i)) \mid c_i \neq 0\}\Big) + (\{0\} \times \mathbb{R}_{\geq 0}).$$

Und es gilt:

$\Delta(f)$ *hat Kante mit Steigung* $\lambda \Longleftrightarrow V(f)$ *hat Punkt mit Bewertung* $-\lambda$.

Beispiel

$$\Delta(tx^2 + x + 1) =$$



Tropische Varietäten von Mengen mit Dreiecksgestalt

Proposition (Dritter Schritt: Newtonpolygone)

Das Newtonpolygon *eines univariaten Polynoms* $f = \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i x^i \in K[x]$ *ist gegeben durch*

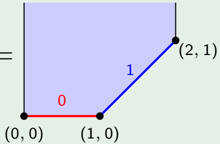
$$\Delta(f) = \mathrm{Conv}\left(\{(i,\nu(c_i)) \mid c_i \neq 0\}\right) + (\{0\} \times \mathbb{R}_{\geq 0}).$$

Und es gilt:

$\Delta(f)$ *hat Kante mit Steigung* $\lambda \Longleftrightarrow V(f)$ *hat Punkt mit Bewertung* $-\lambda$.

Beispiel

$$\Delta(\underbrace{tx^2 + x + 1}_{=:\, f}) =$$

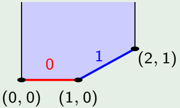


$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Trop}(f) = \{0, -1\}$$

Tropische Varietäten von Mengen mit Dreiecksgestalt

Beispiel (generisch: ein Baum eindeutiger Newtonpolygone)

$f_1 = tx_1^2 + x_1 + 1$



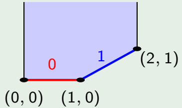
$f_2 = tx_1x_2^2 + x_1x_2 + 1$

$f_3 = x_1x_2x_3 + 1$

$$\mathrm{Trop}(\langle f_1, f_2, f_3\rangle) \ni \quad ({\color{red}0},\ \ ,\ \ )$$

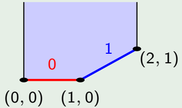
Beispiel (generisch: ein Baum eindeutiger Newtonpolygone)

$f_1 = tx_1^2 + x_1 + 1$



$w_1 = 0$

$f_2 = tx_1x_2^2 + x_1x_2 + 1$

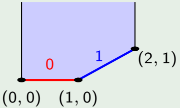


$f_3 = x_1x_2x_3 + 1$

$$\mathrm{Trop}(\langle f_1, f_2, f_3 \rangle) \ni (0, 0, \;\;)$$

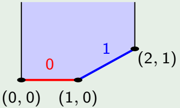
Beispiel (generisch: ein Baum eindeutiger Newtonpolygone)

$f_1 = tx_1^2 + x_1 + 1$



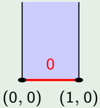
$w_1 = 0$

$f_2 = tx_1x_2^2 + x_1x_2 + 1$



$w_2 = 0$

$f_3 = x_1x_2x_3 + 1$



$\mathrm{Trop}(\langle f_1, f_2, f_3 \rangle) \ni \; (0, 0, 0)$

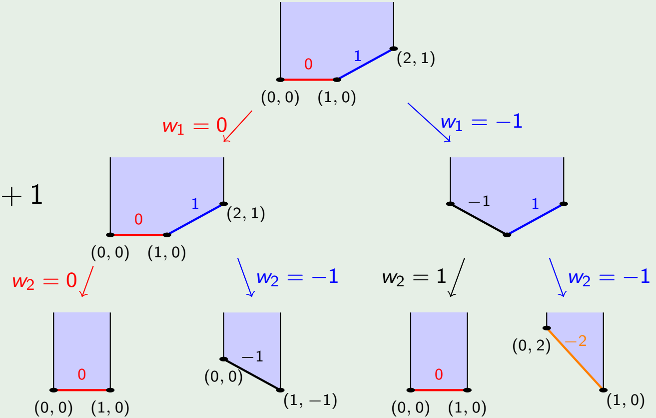
Tropische Varietäten von Mengen mit Dreiecksgestalt

Beispiel (generisch: ein Baum eindeutiger Newtonpolygone)

$f_1 = tx_1^2 + x_1 + 1$

$f_2 = tx_1x_2^2 + x_1x_2 + 1$

$f_3 = x_1x_2x_3 + 1$

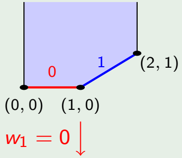


$$\mathrm{Trop}(\langle f_1, f_2, f_3\rangle) = \{(0,0,0), (0,-1,1), (-1,1,0), (-1,-1,2)\}$$

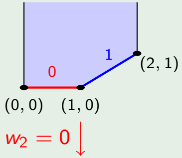
Tropische Varietäten von Mengen mit Dreiecksgestalt

Beispiel (ein Ast mehrdeutiger Newtonpolygone)

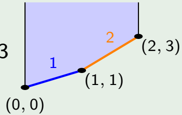
$$f_1 = tx_1^2 + x_1 + 1$$



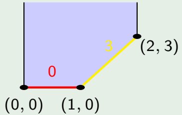
$$f_2 = tx_1x_2^2 + x_1x_2 + 1$$



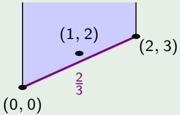
$$f_3 = t^3x_3^2 + (x_1 - x_2)x_3 + 1$$



$\Delta(f(1, 1+t, x_3))$



generisch

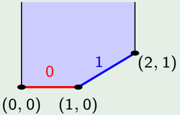


$\Delta(f(1, 1+t^2, x_3))$

Tropische Varietäten von Mengen mit Dreiecksgestalt

Beispiel (ein Ast mehrdeutiger Newtonpolygone)

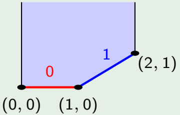
$$f_1 = tx_1^2 + x_1 + 1$$



müssen Nullstellen bestimmen
(aber nur endliche Präzision!)

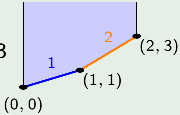
$w_1 = 0 \downarrow$

$$f_2 = tx_1x_2^2 + x_1x_2 + 1$$

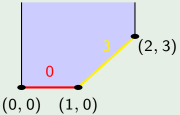


$w_2 = 0 \downarrow$

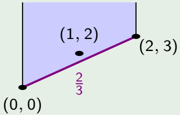
$$f_3 = t^3x_3^2 + (x_1 - x_2)x_3 + 1$$



$\Delta(f(1, 1+t, x_3))$



generisch



$\Delta(f(1, 1+t^2, x_3))$

Timings (in Sekunden, abgebroochen nach 24 Stunden)

	Gröbner Methodik	*Newton Methodik*	
		$w \in \mathrm{Trop}(I)$	*GB bez.* $>_w$
$\mathrm{Det}(2,5,5)$	*1*	*1*	*1*
$\mathrm{Det}(3,5,5)$	*7*	*1*	*1*
$\mathrm{Det}(2,6,6)$	*1*	*1*	*1*
$\mathrm{Det}(3,6,6)$	*900*	*8*	*1*
$\mathrm{Det}(4,6,6)$	*1100*	*41*	*1*
$\mathrm{Grass}(3,7)$	-	*1*	*1*
$\mathrm{Grass}(3,8)$	-	*3*	*1*
$\mathrm{Grass}(3,9)$	-	*19*	*12*
$\mathrm{Grass}(4,7)$	-	*1*	*1*
$\mathrm{Grass}(4,8)$	-	*9*	*3*
$\mathrm{Grass}(4,9)$	-	*220*	*6600*
$\mathrm{Grass}(5,8)$	-	*3*	*1*

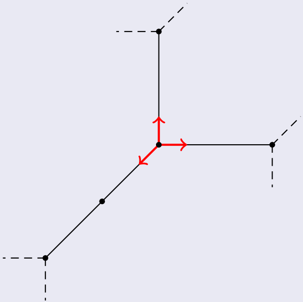
Berechung tropischer Varietäten

Algorithmus (Tropische Varietäten)

Finde $w \in \mathrm{Trop}(I)$
Konstruiere $C_w(I)$ *und setze* $\mathcal{T} := C_w(I)$
repeat
    Wähle $u \in \partial\mathcal{T}$
    Berechne $\color{red}{\mathrm{Trop}(\mathrm{in}_u(I)) = \bigcup_{i=1}^{k} v_i \cdot \mathbb{R}_{\geq 0}}$
    Konstruiere $C_{\nu, u+\varepsilon\cdot v_i}(I)$ *und setze*

$$\mathcal{T} := \mathcal{T} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} C_{u+\varepsilon v_i}(I)\right)$$

until $\partial\mathcal{T} = \emptyset$



Bottlenecks

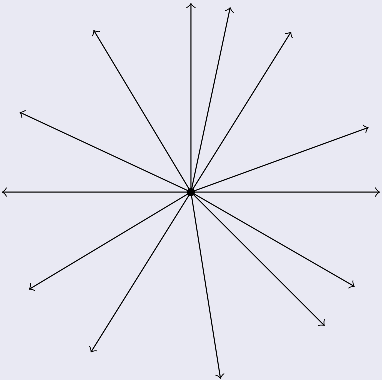
1. ~~*Finde* $w \in \mathrm{Trop}(I)$~~.
2. *Berechne* $\mathrm{Trop}(J)$, *wobei* $\mathrm{Trop}(J)$ *ein eindimensionaler Fächer.*

Berechung der Links tropischer Varietäten

Bottleneck

2. *Berechne* Trop(J), *wobei* Trop(J) *ein eindimensionaler Fächer.*

Idee

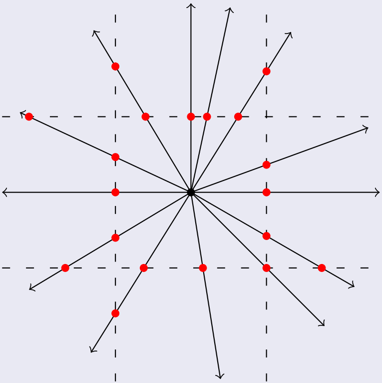


Berechung der Links tropischer Varietäten

Bottleneck

2. *Berechne* $\operatorname{Trop}(J)$, *wobei* $\operatorname{Trop}(J)$ *ein eindimensionaler Fächer.*

Idee



1. *Berechne* $\operatorname{Trop}(J|_{x_i=t^{\pm 1}})$

$$\| \quad \text{[BJSST 2007] [Osserman–Payne 2013]}$$

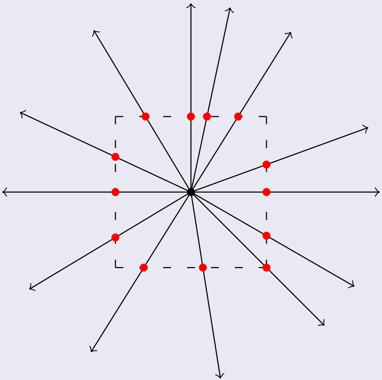
$$\operatorname{Trop}(J) \cap \{w_i = \pm 1\}$$

Berechung der Links tropischer Varietäten

Bottleneck

2. *Berechne* $\mathrm{Trop}(J)$, *wobei* $\mathrm{Trop}(J)$ *ein eindimensionaler Fächer.*

Idee



1. *Berechne* $\mathrm{Trop}(J|_{x_i=t^{\pm 1}})$

$$||$$

[BJSST 2007]
[Osserman–Payne 2013]

$$\mathrm{Trop}(J) \cap \{w_i = \pm 1\}$$

2. *Entferne alle redundanten Punkte.*

Implementation

Für $K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$ vollständig implementiert mit Hilfe von:

1. SINGULAR für Gröbnerbasen und Dreieckszerlegung,
2. GFAN/POLYMAKE für konvexe Geometrie,
3. MAGMA für komplexen Newton–Puiseux Algorithmus.

Bald$^{(\mathrm{TM})}$ in der SINGULAR-Bibliothek `tropicalNewton.lib`.

Berechnung tropischer Varietäten

Implementation

Für $K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$ vollständig implementiert mit Hilfe von:

1. SINGULAR für Gröbnerbasen und Dreieckszerlegung,
2. GFAN/POLYMAKE für konvexe Geometrie,
3. MAGMA für komplexen Newton–Puiseux Algorithmus.

Bald$^{(\mathrm{TM})}$ in der SINGULAR-Bibliothek `tropicalNewton.lib`.

In Arbeit

- Ersetze MAGMA mit NEMO im Rahmen vom OSCAR.

Berechnung tropischer Varietäten

Implementation

Für $K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$ vollständig implementiert mit Hilfe von:

1. SINGULAR für Gröbnerbasen und Dreieckszerlegung,
2. GFAN/POLYMAKE für konvexe Geometrie,
3. MAGMA für komplexen Newton–Puiseux Algorithmus.

Bald$^{(\mathrm{TM})}$ in der SINGULAR-Bibliothek `tropicalNewton.lib`.

In Arbeit

- Ersetze MAGMA mit NEMO im Rahmen vom OSCAR.

Bottlenecks

1. ~~Finde $w \in \mathrm{Trop}(I)$~~.
2. ~~Berechne $\mathrm{Trop}(J)$, wobei $\mathrm{Trop}(J)$ ein eindimensionaler Fächer~~.
3. Gröbnerbasen von Initialidealen während dem Gröbner walk.

Berechnung tropischer Varietäten

Beispiel (Grass$(3,7)$)

- Grass(k,n) parametrisiert k-dimensionalen Untervektorräume eines n-dimensionalen Vektorraums.
- Herrmann–Jensen–Joswig–Sturmfels 2009:
  Trop(Grass$(3,7)$) ist ein simplizialer Fächer mit f-Vektor:

  $$(721, 16800, 124180, 386155, 522585, 252000)$$

  Modulo S_7-Wirkung, ist der f-Vektor $(6, 37, 140, 296, 300, 125)$.
- Die ehemalige Rechenzeit betrug 25 Stunden. Die neue Rechenzeit beträgt 3 Minuten.

Computing in Tropical Geometry

11. und 12. Mai 2017 in Berlin

Sprecher:

- Xavier Allamigeon (Paris)
- Janko Böhm (Kaiserslautern)
- Robert Crowell (Bonn)
- Matteo Gallet (Linz)
- Marvin Hahn (Tübingen)
- Paul Helminck (Bremen)
- Anders Jensen (Aarhus)
- Hannah Markwig (Tübingen)
- Benjamin Schröter (Berlin)
- Mateusz Skomra (Paris)
- Thorsten Theobald (Frankfurt)
- Ngoc Tran (Bonn)
- Anna-Lena Winz (Berlin)

Organisatoren:

- Michael Joswig
- Marta Panizzut
- Yue Ren
- Bernd Sturmfels

EINSTEIN Foundation.de

Einstein Stiftung Berlin
Einstein Foundation Berlin

Berechnung tropischer Varietäten