

# CA-gestützte Lehre in großen Studiengängen

## STACK in der Linearen Algebra

Hendrikje Schmidtpott

11. Mai 2017

# Die Herausforderung

Wir betreiben Lehrexport für etwa 400 Elektrotechnik- und Informatikstudierende, Themen: Lineare Algebra, Analysis und Diskrete Strukturen.

- ▶ Mathematik ist nur “notwendiges Übel”
- ▶ Hausaufgaben werden abgeschrieben
- ▶ immenser Aufwand bei der Korrektur der Hausaufgaben
- ▶ rechnerische Fähigkeiten fehlen

# Lösungsansatz

Neben den handschriftlichen Abgaben sollen auch elektronische Aufgaben bearbeitet werden. Diese sollen sowohl Hausaufgaben ersetzen als auch als zusätzliches Übungswerkzeug dienen.

Wir nutzen bereits Moodle zur Kommunikation mit den Studierenden, es liegt nahe, dies auch zur Aufgabenerstellung zu nutzen.

Moodle selbst liefert Testumgebungen. Mit dem STACK-plugin können Eingaben der Studenten durch ein Computeralgebrasystem ausgewertet werden.

# Was ist STACK?

- ▶ kurz für System for Teaching and Assessment using a Computer Algebra Kernel
- ▶ basiert auf Maxima
- ▶ ist OpenSource, entwickelt an der Universität Birmingham
- ▶ akzeptiert numerische Antworten, Terme, Dropdown oder Bulletlisten
- ▶ kann randomisierte Aufgaben stellen
- ▶ kann mit den Antworten der Studenten weiterarbeiten
- ▶ gibt differenziertes Feedback
- ▶ Ausdrücke wie int, diff etc. können natürlich auch in den Antworten ausgeschlossen werden
- ▶ verschiedene Test auf das korrekte Ergebnis sind möglich z.B. gleicher Ausdruck, algebraische Äquivalenz, etc.

Frage nachlesen | Starte die Frage-Test...

Gegeben Sei die Matrix  $A = \begin{bmatrix} -12 & -4 & 6 \\ 8 & 4 & -4 \\ -28 & -8 & 14 \end{bmatrix}$

Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte des Polynoms.

$P_A(x) =$

$\lambda =$

Berechnen Sie falls möglich die invertierbare Matrix  $S$  und die Diagonalmatrix  $D$  sodass  $S^{-1}AS = D$  gilt.

$S =$

<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

$D =$

<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Berechnen Sie die Determinante von  $A$ .  $\det(A) =$

Abbildung: Studentenansicht einer Testfrage

Gegeben Sei die Matrix  $A = \begin{bmatrix} -12 & -4 & 6 \\ 8 & 4 & -4 \\ -28 & -8 & 14 \end{bmatrix}$ .

Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte des Polynoms.

$P_A(x) =$

Ihre letzte Antwort wurde folgendermaßen interpretiert:  $-x^3 + 6 \cdot x^2 - 8 \cdot x$

Die folgenden Variablen wurden gefunden:  $[x]$

$x =$

Ihre letzte Antwort wurde folgendermaßen interpretiert:  $[4, 2, 0]$

Berechnen Sie falls möglich die invertierbare Matrix  $S$  und die Diagonalmatrix  $D$  sodass  $S^{-1}AS = D$  gilt.

$S =$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ihre letzte Antwort wurde folgendermaßen interpretiert:  $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

**Abbildung:** Eingaben werden sofort auf Ihre Gültigkeit überprüft

# backend

Grundeinträge

Aktuelle Kategorie: Standard für Test1 (2) ☒ Diese Kategorie benutzen

In der Kategorie sichern: Standard für Test1 (2)

Fragetitel\*

Aufgabenvariablen

Zufallsgruppe

Fragetext\* 

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

41

42

43

44

45

46

47

48

49

50

51

52

53

54

55

56

57

58

59

60

61

62

63

64

65

66

67

68

69

70

71

72

73

74

75

76

77

78

79

80

81

82

83

84

85

86

87

88

89

90

91

92

93

94

95

96

97

98

99

100

Leiten Sie  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  nach  $x$  ab.  
[[input:ans1]]  
[[validation:ans1]]  
Berechnen Sie die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x=0$ .  
[[input:ans2]]  
[[validation:ans2]]

Erreichbare Punkte\*

Spezifisches Feedback\* 

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

41

42

43

44

45

46

47

48

49

50

51

52

53

54

55

56

57

58

59

60

61

62

63

64

65

66

67

68

69

70

71

72

73

74

75

76

77

78

79

80

81

82

83

84

85

86

87

88

89

90

91

92

93

94

95

96

97

98

99

100

[[feedback:pt1]]

Abbildung: Variablen und Funktionendeklaration, Aufgabenstellung

# backend

› Eingabe: ans1

› Eingabe: ans2

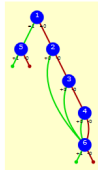
▼ Rückmeldebaum (PRT): prt1

Aufgabenwert

Auto-Vereinfachung

Feedback-Variablen

Dieser potenzielle Rückmeldebaum wird aktiv, wenn Teilnehmende folgendes geantwortet hat: ans1, ans2



Knoten 1	Antwortüberprüfung	AlgEquiv	SAns	ans1	TAns	diff(p,x)	Test-Optionen	Feedback
unterdrücken: <input type="button" value="Nein"/>								

Abbildung: Antwortspezifikation und Feedbackbaum

Frage 1: Geben Sie die Ableitung von  $p(x)$  an, Frage 2: Werten Sie diese an Stelle  $x_0 = 0$  aus.



# feedback

Leiten Sie  $f(x) = (-4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 2)^8$  nach  $x$  ab. Frage nachbessern | Starte d

$$8 \cdot (-4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 2)^7$$

Ihre letzte Antwort wurde folgendermaßen interpretiert:

$$8 \cdot (-4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 2)^7$$

Die folgenden Variablen wurden gefunden:  $[x]$

Berechnen Sie die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x = 0$

$$8 \cdot 2^7$$

Ihre letzte Antwort wurde folgendermaßen interpretiert:  $8 \cdot 2^7$

Ihre Antwort ist teilweise korrekt.

Sie haben vermutlich die innere Ableitung vergessen.

Sie haben Ihre (falsche) Ableitung richtig ausgewertet.

**Abbildung:** entlang des Feedbackbaums

## typische Aufgaben

Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ .

- a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von  $A$ .
- b) Berechnen Sie alle Eigenwerte zu  $A$
- c) Bestimmen Sie nun alle Basen der zugehörigen Eigenräume von  $A$ . Ist die Matrix  $A$  diagonalisierbar?
- d) Betrachten Sie nun die Matrix  $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ .  
Berechnen Sie  $\det(B)$ . Ist die lineare Abbildung  $\mathcal{L}_B$  mit der darstellenden Matrix  $B$  surjektiv?

## typische Aufgaben

- ▶ Ermitteln Sie in kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten die Lösung der Gleichung

$$(1 + i\sqrt{3})z = \frac{12}{3 + i\sqrt{3}}$$

und berechnen Sie die sechste Potenz dieser Lösung.

- ▶ Geben Sie alle Lösungen  $z$  der Gleichung an:  $z^3 = 2^{\frac{7}{2}} \cdot i - 2^{\frac{7}{2}}$

- ▶ Durch die Punkte  $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$  und  $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

sei eine Ebene  $E$  gegeben. Bestimmen Sie den Abstand des

Punktes  $S = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  zur Ebene  $E$ .

## brauchbare Matrizen konstruieren:

Für einen Großteil der Aufgabenstellungen in der Linearen Algebra ist die Erstellung von Matrizen mit bestimmten Eigenschaften wichtig.

$$A \in GL(3, \mathbb{R}): D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \text{ mit } d_1, d_2, d_3 \neq 0 \text{ ist}$$

definitiv aus  $GL(3, \mathbb{R})$ .

Multiplikation mit einer Matrix  $B \in Mat(3 \times 3)$  liefert dann

$$A = B \cdot D = \begin{pmatrix} s_1 d_1 & t_1 d_2 & u_1 d_3 \\ s_2 d_1 & t_2 d_2 & u_2 d_3 \\ s_3 d_1 & t_3 d_2 & u_3 d_3 \end{pmatrix}.$$

Für vollen Rang von  $B$  bzw.  $A$  müssen Einschränkungen getroffen werden:

$$s_1 \neq 0, \quad t_2 \neq \frac{s_2 t_1}{s_1} \quad \text{und} \quad u_3 \neq \frac{(s_1 t_3 - s_3 t_1) u_2 + (s_3 t_2 - s_2 t_3) u_1}{s_1 t_2 - s_2 t_1}.$$

Alle weiteren Parameter dürfen zufällig bestimmt werden.

## brauchbare Matrizen konstruieren:

Analog können natürlich größere Matrizen konstruiert werden oder auch Matrizen von mit anderem Rang. Rang 2 z.B. mit

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & d_3 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } d_1, d_2, d_3 \neq 0.$$

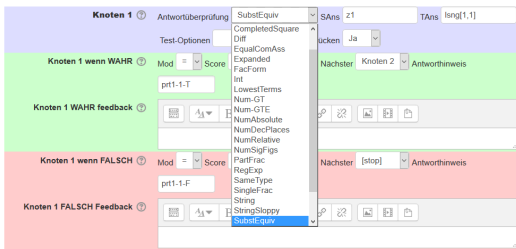
Durch die Kontrolle der randomisierten Matrizen können Aufgaben zu Gleichungssystemen, Geometrie, Eigenwerten und Eigenvektoren etc. zuverlässig konstruiert werden.

# Aufgabenkonstruktion

Aufgabenstellung: zu gegebener Matrix  $A$  sollen charakteristisches Polynom, Eigenwerte und die zugehörige Matrix  $S$  aus Eigenvektoren ermittelt werden.

- ▶ erstelle zufällige reguläre Matrix  $S$
- ▶ bestimme  $d = \text{Det}(S)$  und gebe Eigenwerte vor:  
 $\{d\lambda_1, d\lambda_2, \dots\}$
- ▶ Berechne  $A = S.D.S^{-1}$  aus der diagonalisierten Matrix  $D$  und  $S$

# Testroutinen



STACK bietet bereits viele sinnvolle Tests um die Antworten der Studenten zu überprüfen an.

Sonst können Musterlösung und Studentenlösung durch Funktionen manipuliert werden, so dass eine eigene Testroutine verwendet werden kann.

Studentenlösungen können sich ebenfalls für Feedback manipulieren lassen: "Ihre Vektoren sind nicht linear unabhängig,  $v_3$  lässt sich durch  $v_1$  und  $v_2$  wie folgt darstellen:  $v_3 = sv_1 + tv_2$ ."

# Fazit

- ▶ Prinzipiell sind viele Aufgabentypen denkbar
- ▶ *fast* alles was mit MAXIMA möglich ist, funktioniert auch in STACK
- ▶ jeder Student bekommt eigene Aufgaben
- ▶ großer Arbeitsaufwand im Vorfeld um Fehler und unterschiedlich schwere Aufgaben auszuschließen.
- ▶ Folgefehler in mehrstufigen Aufgaben können leicht berücksichtigt werden.
- ▶ Zwischenschritte nur begrenzt überprüfbar.
- ▶ wahrscheinlich niedrige Hemmschwelle ein Computeralgebrasystem zur Hilfe zu nehmen, wenn man sowieso schon online ist