

Einsatz von Computeralgebra zur Klassifikation der maximierenden Sextiken

– Computeralgebra Tagung in Kassel –

Christian Gorzel
gorzelc@uni-muenster.de

Universität Münster

4. Mai 2017

Übersicht

- Existenz: Maple
- Konstruktion: Singular
- Analyse: Singular, Maple
- Definitionskörper: pari/gp
- absolute Faktorisierung: Singular
- elliptische Komponenten Maple
- Torusstruktur: Singular
- Fundamentalgruppe: VKCURVE GAP

Ebene reduzierte algebraische Kurve $\mathcal{C} = \left\{ \tilde{f}(x, y, z) = 0 \right\} \subset \mathbb{P}^2$.

Definition (Milnorzahl)

- lokale Milnorzahl $\mu_{\text{loc}} = \dim \mathbb{C}\{x, y\} / \text{Jac}(f)$.
- totale Milnorzahl

$$\mu_{\text{tot}}(\mathcal{C}) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{C})} \mu_{\text{loc}}(p)(\mathcal{C})$$

Normalformen der einfachen Singularitäten

$$\mathbf{A}_k : y^2 - x^{k+1} = 0, \quad k \geq 1$$

$$\mathbf{E}_6 : y^3 - x^4 = 0$$

$$\mathbf{D}_k : x(y^2 - x^{k-2}) = 0, \quad k \geq 4$$

$$\mathbf{E}_7 : y(y^2 - x^3) = 0$$

$$\mathbf{E}_8 : y^3 - x^5 = 0$$

Der Index ist die lokale Milnorzahl.

Der einfachen Kurve wird die singuläre Kombination zu geordnet.

Bsp.: $2\mathbf{D}_6 + \mathbf{D}_4 + 3\mathbf{A}_1$

Geometrie der ADE-Singularitäten

- \mathbf{A}_k -Singularität: k ungerade : zwei Zweige (Node)
 k gerade : ein Zweig (Cusp)
- \mathbf{D}_{k+3} -Singularität: eine transversal geschnittene \mathbf{A}_k
- $\mathbf{E}_6, \mathbf{E}_8$: Cusps
- \mathbf{E}_7 : eine \mathbf{A}_2 mit ihrer Tangente

Definition (Maximierende Sextik Persson 1986)

Eine ebene Kurve von Grad sechs mit nur einfachen Singularitäten deren totale Milnorzahl den maximalen Wert 19 annimmt.

Auszug aus Yangs Tabelle (1996):

$$*2E_8 + A_3$$

$$*E_8 + E_7 + A_4$$

$$*E_8 + E_6 + D_5$$

$$*E_8 + E_6 + A_3 + A_2$$

...

$$A_7 + 2A_5 + 2A_1 [2]$$

$$A_7 + A_5 + A_4 + 3A_1$$

$$*3A_6 + A_1$$

$$*A_6 + A_5 + 2A_4$$

$$3A_5 + 2A_2$$

$$*2E_8 + A_2 + A_1$$

$$E_8 + E_7 + A_3 + A_1$$

$$*E_8 + E_6 + A_5$$

$$*E_8 + D_{11}$$

...

$$A_7 + A_5 + A_4 + A_3$$

$$A_7 + A_5 + A_3 + A_2 + 2A_1$$

$$*2A_6 + A_4 + A_2 + A_1$$

$$A_6 + A_5 + A_4 + A_3 + A_1$$

$$3A_5 + A_2 + 2A_1$$

$$E_8 + E_7 + D_4$$

$$*E_8 + E_7 + 2A_2$$

$$*E_8 + E_6 + A_4 + A_1$$

$$E_8 + D_{10} + A_1$$

...

$$A_7 + A_5 + A_4 + A_2 + A_1$$

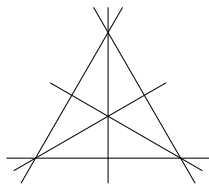
$$*A_7 + 2A_4 + 2A_2$$

$$A_6 + 2A_5 + 3A_1$$

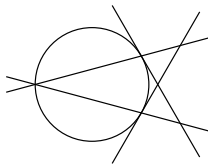
$$3A_5 + A_3 + A_1$$

$$3A_5 + 4A_1$$

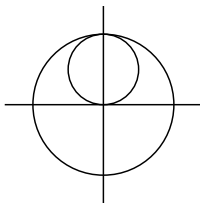
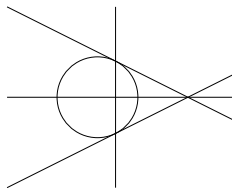
Maximierende Sextiken mit Coniken (Beispiele)



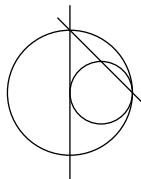
$$4D_4 + 3A_1$$



$$2D_6 + D_4 + 3A_1 [2]$$



$$D_{10} + D_6 + 3A_1$$



$$D_{10} + D_4 + A_3 + 2A_1$$

Etwas Theorie der K3-Flächen

Die doppelte Überlagerung des \mathbb{P}^2 , verzweigt über einer einfachen Sextik ist eine K3-Fläche mit rationalen Singularitäten:

$$\mathbb{X}_{\mathcal{C}} := \left\{ w^2 = \tilde{f}(x, y, z) = 0 \right\} \subset \mathbb{P}^3$$

- Glatte algebraische K3-Flächen haben maximal Picardzahl 20 und diese sind über Zahlkörpern definiert.
- Studiere Einbettung von Dynkin Graphen von Rank 19 in das unimodulare K3-Gitter: $2(-E_8) \oplus 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Komplementäres tranzendentes Gitter T
Diskriminante $d = \det T$
- Kriterium von Urabe zur Existenz von einfachen Sextiken implementiert von Yang (Maple)

Satz (Yang/Shimada Anzahl der maximierenden Sextiken)

519 *Kombinationen*, 623 *Konfigurationen*, 629 *Kurven* $\mathrm{PGL}(2, \bar{\mathbb{Q}})$

Shimadas Liste

Degtyarev (2008) weiterer Algorithmus ... tranzendentes Gitter.
 Implementiert von Shimada mit Maple.
 Zusatzinformation über den Definitionskörper.

No.	Kombination	T	(r, c)
1	$2\mathbf{E}_8 + \mathbf{A}_3$	$[2, 0, 4]$	$(1, 0)$
2	$2\mathbf{E}_8 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1$	$[2, 0, 6]$	$(1, 0)$
3	$\mathbf{E}_8 + \mathbf{E}_7 + \mathbf{D}_4$	$[2, 0, 2]$	$(1, 0)$
4	$\mathbf{E}_8 + \mathbf{E}_7 + \mathbf{A}_4$	$[4, 2, 6]$	$(0, 1)$
5	$\mathbf{E}_8 + \mathbf{E}_7 + \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1$	$[2, 0, 4]$	$(1, 0)$
6	$\mathbf{E}_8 + \mathbf{E}_7 + 2\mathbf{A}_2$	$[6, 0, 6]$	$(1, 0)$
7	$\mathbf{E}_8 + \mathbf{E}_6 + \mathbf{D}_5$	$[2, 0, 12]$	$(1, 0)$
8	$\mathbf{E}_8 + \mathbf{E}_6 + \mathbf{A}_5$	$[6, 0, 6]$	$(0, 1)$

Genus	Combinations	Configurations	$\mathrm{PGL}(2, \overline{\mathbb{Q}})$	$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$
-5	1			1
-4	4	+1		5
-3	35	+7		42
-2	132	+35	+1	183
-1	219	+54	+5	367
0	128	+7		235
	519	623	629	883

Beispiel (Gleiche Konfiguration, aber projektiv verschieden)

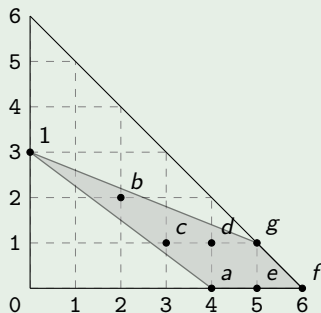
$\mathbf{A}_{17} + 2\mathbf{A}_1(2)$ zwei nodale Kubiken, gemeinsamer Berührungspunkt
 a) gewöhnlicher glatter Punkt b) Wendepunkt

Konstruktion der maximierenden Sextiken

- Bestimme Lösung in Charakteristik $p > 0$
wiederhole dies genügend oft ($\simeq \deg mipo$)
 - Wähle geeignetes Polynom mit unbestimmten Koeffizienten
z.Bsp. $H(x, y) = y^2 + ax^3 + bx^4 + cx^2y + \dots$
 - Setze Transformation $y = y + x^2 + Ax^3 + Bx^4 + \dots$
auf die Normalform ein.
 - Löse das 0-dimensionale algebraische Gleichungssystem,
 - eliminiere die Parameter A, B, \dots der Transformation.
- Hebe die Lösungen aus $\mathbb{Z}_p[a, b, \dots]$
zu einer Lösung in $\mathbb{Q}[a, b, \dots]$ (Singular farey).

Beispiel ($E_8 + E_6 + A_5$)

poly $Q = y^3 + a \cdot x^4 + b \cdot x^2 y^2 + c \cdot x^3 y + d \cdot x^4 y + e \cdot x^5 + f \cdot x^6 + g \cdot x^5 y$;



$$I[1] = 2 \cdot f + 3 \cdot g + 2$$

$$I[2] = 2 \cdot e - 10 \cdot g - 9$$

$$I[3] = 2 \cdot d + 8 \cdot g + 3$$

$$I[4] = 2 \cdot c + 10 \cdot g + 9$$

$$I[5] = 2 \cdot b - 8 \cdot g - 3$$

$$I[6] = 2 \cdot a - g$$

$$I[7] = 16 \cdot g^2 + 36 \cdot g + 27$$

Substitution der unbestimmten Koeffizienten mittels Gröbnerbasis.

Analyse der Gleichungen

Beispiel ($E_8 + E_6 + A_5$)

```
ring r = (0,a),(x,y),dp;
minpoly = 64*a^2+72*a+27;
poly H = 91*x^6+(-128a-162)*x^5*y+(224a-126)*x^5+...

hypmilnor(H);
19
```

Bestimmung der Singularitäten

- Singular `classify.lib` `classify/quickclass`
Rückgabe: Name der (einfachen) Singularität
- Maple `algcurve` package: `singularities(H,x,y)`
Rückgabe: $[mt, \delta, r]$ $\mu_{\text{loc}} = 2\delta_{\text{loc}} - r_{\text{loc}} + 1$
 E_7 und D_7 haben beide $[mt, \delta, r] = [3, 4, 2]$

Vereinfachung des Minimalpolynoms

LLL-Algorithmus "Integer Gram-Schmidt" Gitter-Reduktion

pari/gp

```
? polredabs(64*a^2+72*a+27,3)
```

```
% [a^2 - a + 1, Mod(-3/8*a - 3/8, a^2 - a + 1)]
```

Beispiel ($\mathbf{E}_8 + \mathbf{E}_6 + \mathbf{A}_5$ degree type (6))

Sei $a^2 - a + 1 = 0$.

$$(72a + 8)y^3 - (24a + 33)x^4 - (84a - 294)x^3y - (84a + 252)x^2y^2 \\ + (84a - 294)x^5 + (84a + 252)x^4y + 91x^6 - (48a + 66)x^5y = 0$$

$$\mathbf{E}_8(0 : 1 : 0), \quad \mathbf{E}_6(0 : 0 : 1), \quad \mathbf{A}_5(1 : 1 : 1)$$

Geometrische Reduzibilität

- Konstruktion ergibt evtl. einen zu grossen Definitionskörper
- Abstieg zu minimalem Grad (möglicherweise \mathbb{Q})
- Damit sind Kurven gegebenenfalls irreduzibel über \mathbb{Q} , aber geometrisch (absolut) reduzibel

Beispiel (Definiert über \mathbb{Q} , vollständig reduzibel über $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$)

- $\mathbf{A}_{17} + 2\mathbf{A}_1$ (nicht flexed) zwei nodale Kubiken
- $\mathbf{A}_6 + 2\mathbf{A}_5 + \mathbf{A}_1$ eine \mathbf{A}_6 -Quartik mit zwei konjugierten Wendepunkt-Tangenten.

Zerfällungskörper der Kurve

Singular `absfact.lib`: `absFactorize`, `absFactorizeBCG`
Verschiedene (randomisierte) Algorithmen ...

Galoisgruppen der Zahlkörper

Shimadas Liste zeigt: $\deg [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

- Quadratische Zahlkörper: $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ mit $-15 \leq m \leq 33$.
- Grad drei: 15 Fälle jeweils $\text{Gal} \simeq S_3 \simeq \mathbb{D}_3$.
- Grad vier: 5 Fälle mit $\text{Gal} \simeq \mathbb{D}_4$; einmal $\text{Gal} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- Grad sechs: ein Fall $\text{Gal} \simeq \mathbb{D}_6$. $(|\mathbb{D}_n| = 2n)$

CAS pari/gp: polgalois

No. 450: $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_7 + \mathbf{A}_1$ degree type (5, 1)

Eine \mathbf{A}_{11} -Quintik kombiniert mit \mathcal{F}_2 -Tangente.

Galoisscher Zahlkörper $\alpha^4 - \alpha^2 + 1 = 0$.

Definition (Elliptische Kurve)

Irreduzible Kurve von Geschlecht 1 mit einem k -rationalem Punkt

Es existiert birationale Transformation auf Cubik in Weierstrassform

$$\tilde{C} : y^2 = x^3 + Ax + B, \quad 4A^3 + 27B^2 \neq 0.$$

Algorithmus: von Hoeijs `algcurve` package

$$j\text{-Invariante} \quad j(\tilde{C}) = 1728 \frac{4A^3}{4A^3 + 27B^2}$$

Satz (G. 2014, Elliptische Kurven in maximierenden Sextiken (MS))

- *Es gibt genau zwölf MS mit einer elliptischen Komponente.*
- *Die MS mit ungerader Diskriminante ($d = 3, 15, 55, 75, 175$) haben eine elliptische Komponente.*
- *Mit Diskriminante $d = 3$, ist die j -Invariante 0.*
- *Eine der MS mit $d = 4$ hat eine elliptische Komponente, diese hat j -Invariante 1728.*

Zusätzliche Strukturen

Symmetrien

- Invarianz unter komplexer Spiegelung (pseudo-reflection)
- Rotationssymmetrie

Auffinden solcher Strukturen mittels Koeffizientenvergleich.

Definition (Torustyp)

Eine Sextik $\{ f = 0 \}$ hat eine $(2, 3)$ -Torus Struktur, falls (homogene) Polynome f_2, f_3 , existieren, so dass:

$$f = f_2^3 + f_3^2 = 0$$

Definition (Fundamentalgruppe einer ebenen Kurve)

Die Fundamentalgruppe des Komplements der Kurve $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C})$.

Satz (Zariski)

- Wenn \mathcal{C} nur \mathbf{A}_1 -Singularitäten hat, so ist $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C})$ abelsch.
- Falls \mathcal{C} eine Torusstruktur hat, so ist $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C})$ nicht endlich und nicht abelsch.

Berechnung mit der Methode von Zariski-van Kampen.

Monodromy \rightarrow Zopfgruppe \rightarrow Fundamentalgruppe

VKCURVE (GAP3) von Bessis/Michel nutzt CHEVIE

Klassische Beispiele: Zariski 1929

Beispiel (Endliche nicht abelsche Fundamentalgruppe)

Die $3A_2$ -Quartic (die duale Kurve einer nodalen Cubik) hat

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C}) \simeq \{ a, b \mid ab = AB, bab = aba \} = \mathbb{B}_3(\mathbb{P}^1)$$

Die 3-Dihedrale Gruppe $\tilde{\mathbb{D}}_3$ der Ordnung 12.

Die Fundamentalgruppe hängt von der Lage der Singularitäten ab.

Beispiel (Zariski-Paar: Sextic mit sechs Cusps)

- a) Die $6A_2$ liegen nicht auf einer Conik. Dann ist $\pi_1 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.
- b) Die $6A_2$ liegen alle auf einer Conik. Dann ist $\pi_1 \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$.
Die Kurve hat eine Torusstruktur.

Satz

Sei $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(1)} \cup \dots \cup \mathcal{C}^{(s)}$, mit $\mathcal{C}^{(i)}$ geom. irreduzibel vom Grad d_i .
Falls die Fundamentalgruppe abelsch ist, gilt:

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C}; \mathbb{Z}) \cong H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{s-1} \times \mathbb{Z}_{\text{ggT}(d_1, \dots, d_s)}.$$

Abelsche Fundamentalgruppen der Sextiken

Degrees	$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C}; \mathbb{Z})$	Presentation
(6)	$\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$	$\{ a \mid aaa = AAA \}$
(5, 1)	\mathbb{Z}	
(4, 2)	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$	$\{ a, b \mid ab = ba, ab = BA \}$
(3, 3)	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3$	$\{ a, b \mid ba = ab, aaa = BBB \}$
(3, 2, 1)	\mathbb{Z}^2	
...		

Beispiel $(A_{17} + 2A_1)(2)$ degree type $(\times 3, \times 3)$ ein Berührungspunkt

a) gewöhnlicher glatter Punkt: $\pi_1 \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3$

$$\begin{aligned} & y^2 - 2x^2y + 3xy^2 + x^4 - 6x^3y + 9x^2y^2 - 2xy^3 - 3y^4 \\ & + 3x^5 - 18x^4y + 2x^3y^2 - 18xy^4 + 9x^6 + 3x^4y^2 \\ & + 18x^3y^3 + x^2y^4 + 3xy^5 + 9y^6 \\ & = ((a-1)y - (a-1)x^2 - 3xy + 3x^3 - (a-1)xy^2 + 3y^3) \\ & \times (-ay + ax^2 - 3xy + 3x^3 + axy^2 + 3y^3) = 0 \end{aligned}$$

wobei $a^2 - a + 1 = 0$.

b) Wendepunkt: $\pi_1 \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_3$

$$\begin{aligned} & (2 - 3y - 3x^2y + y^3) \cdot (2 - 3y - 3x^2y) \\ & = ((6x^2y - y^3 + 6y - 4)^2 - (y^2)^3)/4 = 0 \end{aligned}$$

Theorem (Oka-Degtyarev)

Irreduzible maximierende Sextiken, die nicht vom Torustyp sind, haben endliche abelsche Fundamentalgruppe \mathbb{Z}_6 bis auf folgende Ausnahmen:

No	Kombination	ord π_1
42	$\mathbf{E}_8 + \mathbf{A}_4 + \mathbf{A}_3 + 2\mathbf{A}_2$	720
116	$\mathbf{E}_7 + 2\mathbf{A}_4 + 2\mathbf{A}_2$	41040
123	$2\mathbf{E}_6 + \mathbf{A}_4 + \mathbf{A}_3$	720
482	$\mathbf{A}_9 + 2\mathbf{A}_4 + \mathbf{A}_2$	21600
511	$3\mathbf{A}_6 + \mathbf{A}_1$	42

Maximierende Sextiken: Der Stand der Dinge

Aktives Forschungsgebiet der letzten 30 Jahre.

Persson, Yang, Wall, Oka, Pho, Shimada, Tokunaga, Degtyarev,
Artal Bartolo, Orevkov, . . .

Von den maximierenden Sextiken waren ~ 80 – 100 Gleichungen
explizit bekannt: Torustyp, Zariskipaare, irreduzible mit \mathbf{A}'_k 's, . . .

Es fehlen:

- explizite Gleichungen von acht maximierenden Sextiken:
- somit sind vier Zahlkörper noch nicht bestimmt.
- Zuordnungen der transzendentalen Gitter in fünf Fällen
- bessere Gleichungen für die irreduziblen Kurven mit nur \mathbf{A}_k 's

The Catalogue of Maximizing Sextics (G. 2016)

Genus	Degrees	Component	#
-5	(1,1,1,1,1,1)		1
-4	(2,1,1,1,1)		5
-3	(3,1,1,1)	singular cubic	28
	(2,2,1,1)		14
-2	(4,1,1)	rational quartic	97
	(3,2,1)	rational cubic	64
	(2,2,2)		6
	(3,1,1,1)	smooth cubic	1
-1	(5,1)	rational quintic	182
	(4,2)	rational quartic	64
	(3,3)	rational cubics	28
	(4,1,1)	elliptic quartic	3
	(3,2,1)	smooth cubic	1
0	(6)	rational sextic	128
	(5,1)	elliptic quintic	5
	(4,2)	elliptic quartic	1
	(3,3)	elliptic and rational cubic	1
	(4,1,1)	hyperelliptic quartic	0

Referenzen: Computeralgebra Programme I



Singular 4.0.1 — *A computer algebra system for polynomial computations*, <http://www.singular.uni-kl.de> (2014).



GP/PARI CALCULATOR Version 2.6.1,
<http://pari.math.u-bordeaux.fr>



van Hoeij, M.: *The algcurve package for Maple*



Bessis, D.; Michel, J.: *The VKCURVE package*, Version 1.2
<http://www.math.jussieu.fr/~jmichel/vkcurve.html>



GAP – *Groups, Algorithms, and Programming*, Version 4.7.5,
The GAP Group (2014), <http://www.gap-system.org>.

Referenzen: Maximierende Sextiken Artikel (Auswahl) I



Artal Bartolo, E.; Carmona Ruber, J.; Cogolludo Agustín, J.I.: *On sextic curves with big Milnor number*, Trends in Singularities, 1–29, Birkhäuser, Basel, 2002.



Degtyarev, A.: *On deformations of singular plane sextics*. J. Algebraic Geom. **17** (2008), 101–135.



Gorzel, Ch.: *The simple maximizing sextics with an elliptic component*, 2014.







—, *The Catalogue of Maximizing Sextics*, forthcoming, 2016.



Oka, M.; Pho, D.T.: *Classification of sextics of torus type*, Tokyo J. Math. **25** (2002), no. 2, 399–433.

Referenzen: Maximierende Sextiken Artikel (Auswahl) II

-  Persson, U.: *Double sextics and singular K-3 surfaces*, in: Algebraic geometry, Sitges (Barcelona), 1983, 262–328, LNM **1124**, Springer, Berlin, 1985.
-  Shimada, I.: *On the connected components of the moduli of polarized K3 surfaces (The list of maximizing sextics)* (2007) www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~shimada/preprints/connected_components/connK3.pdf
-  Yang, J.-G.: *Sextic curves with simple singularities*, Tohoku Math. J. (2) **48** (1996), no. 2, 203–227.
-  Zariski: *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve*, Amer. J. Math. **51**, no. 2, 305–328.