Kettenbruchentwicklungen von Funktionen

Henning Schatz

Institut für Mathematik
Universität Kassel

Computeralgebra-Tagung 2017
05.05.2017

Inhalt

Inhalt

Ein Ausdruck der Form

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \dots}}$$

mit $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, k \geq 1$ und $b_k \in \mathbb{C}, k \geq 0$ heißt (unendlicher) Kettenbruch.

Ein Ausdruck der Form

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \dots}}$$

mit $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, k \geq 1$ und $b_k \in \mathbb{C}, k \geq 0$ heißt (unendlicher) Kettenbruch.

Alternative Notationen sind

$$b_0 + \frac{a_1 |}{| b_1} + \frac{a_2 |}{| b_2} + \dots \quad \text{und} \quad b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k},$$

für endliche Kettenbrüche entsprechend

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}, \quad b_0 + \frac{a_1 |}{| b_1} + \frac{a_2 |}{| b_2} + \dots + \frac{a_n |}{| b_n}, \quad b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k}.$$

- Ähnlich wie komplexe Zahlen sich durch Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ approximieren lassen, ist dies auch mit Kettenbrüchen $b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k}$ möglich.

- Ähnlich wie komplexe Zahlen sich durch Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ approximieren lassen, ist dies auch mit Kettenbrüchen $b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathcal{K}}} \frac{a_k}{b_k}$ möglich.
- Die Definition von Kettenbrüchen lässt sich einfach von $\mathbb{C}$ auf den normierten Körper $\mathbb{L}$ der formalen Potenzreihen erweitern. So lassen sich auch komplexe Funktionen durch Kettenbrüche $b_0(z) + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathcal{K}}} \frac{a_k(z)}{b_k(z)}$ approximieren.

- Ähnlich wie komplexe Zahlen sich durch Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ approximieren lassen, ist dies auch mit Kettenbrüchen $b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathcal{K}}} \frac{a_k}{b_k}$ möglich.
- Die Definition von Kettenbrüchen lässt sich einfach von $\mathbb{C}$ auf den normierten Körper $\mathbb{L}$ der formalen Potenzreihen erweitern. So lassen sich auch komplexe Funktionen durch Kettenbrüche $b_0(z) + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathcal{K}}} \frac{a_k(z)}{b_k(z)}$ approximieren.
- In der Praxis sind die $a_k(z), b_k(z)$ üblicherweise Polynome in z oder $\frac{1}{z}$ und rational in k.

Anwendungen

- Jede irrationale Zahl x besitzt eine eindeutige Darstellung als regulärer Kettenbruch, die beste rationale Näherungen von x liefert.
  $\rightsquigarrow$ Schaltjahrregeln, $\pi \approx \dfrac{22}{7}, \ldots$

Anwendungen

- Jede irrationale Zahl x besitzt eine eindeutige Darstellung als regulärer Kettenbruch, die beste rationale Näherungen von x liefert.
  $\rightsquigarrow$ Schaltjahrregeln, $\pi \approx \frac{22}{7}, \dots$
- Jeder periodische reguläre Kettenbruch ist eine quadratische Irrationalzahl und umgekehrt.
  $\rightsquigarrow$ Lösungen von Pellschen Gleichungen $x^2 - dy^2 = 1$

Anwendungen

- Jede irrationale Zahl x besitzt eine eindeutige Darstellung als regulärer Kettenbruch, die beste rationale Näherungen von x liefert.
  $\rightsquigarrow$ Schaltjahrregeln, $\pi \approx \frac{22}{7}, \ldots$
- Jeder periodische reguläre Kettenbruch ist eine quadratische Irrationalzahl und umgekehrt.
  $\rightsquigarrow$ Lösungen von Pellschen Gleichungen $x^2 - dy^2 = 1$
- Irrationalitätsbeweise
  $\rightsquigarrow$ e (Euler 1737), π (Lambert 1761), $\zeta(3)$ (Apéry 1979)
  Ziel meiner Dissertation: Apérys Methode mittels Computeralgebra auf $\zeta(5)$ anwenden

Anwendungen

- Jede irrationale Zahl x besitzt eine eindeutige Darstellung als regulärer Kettenbruch, die beste rationale Näherungen von x liefert.
  $\rightsquigarrow$ Schaltjahrregeln, $\pi \approx \frac{22}{7}, \ldots$
- Jeder periodische reguläre Kettenbruch ist eine quadratische Irrationalzahl und umgekehrt.
  $\rightsquigarrow$ Lösungen von Pellschen Gleichungen $x^2 - dy^2 = 1$
- Irrationalitätsbeweise
  $\rightsquigarrow$ e (Euler 1737), π (Lambert 1761), $\zeta(3)$ (Apéry 1979)
  Ziel meiner Dissertation: Apérys Methode mittels Computeralgebra auf $\zeta(5)$ anwenden
- Faktorisierung großer Zahlen
  $\rightsquigarrow$ Kettenbruchmethode (Lehmer, Powers 1931): Standardverfahren in den 1980ern bis Ablöse durch quadratisches Sieb 1990

Anwendungen

- Jede irrationale Zahl x besitzt eine eindeutige Darstellung als regulärer Kettenbruch, die beste rationale Näherungen von x liefert.
  $\rightsquigarrow$ Schaltjahrregeln, $\pi \approx \frac{22}{7}, \ldots$
- Jeder periodische reguläre Kettenbruch ist eine quadratische Irrationalzahl und umgekehrt.
  $\rightsquigarrow$ Lösungen von Pellschen Gleichungen $x^2 - dy^2 = 1$
- Irrationalitätsbeweise
  $\rightsquigarrow$ e (Euler 1737), π (Lambert 1761), $\zeta(3)$ (Apéry 1979)
  Ziel meiner Dissertation: Apérys Methode mittels Computeralgebra auf $\zeta(5)$ anwenden
- Faktorisierung großer Zahlen
  $\rightsquigarrow$ Kettenbruchmethode (Lehmer, Powers 1931): Standardverfahren in den 1980ern bis Ablöse durch quadratisches Sieb 1990
- C-Kettenbrüche, eindeutig zu Taylorreihen korrespondierende Kettenbrüche
  $\rightsquigarrow$ häufig schnellere Konvergenz auf größerem Bereich

Inhalt

Definition (Kettenbruch, partielle Zähler und Nenner, n-ter Näherungsbruch)

Ein Kettenbruch ist ein geordnetes Paar von komplexen Folgen $\left(\left\{(a_k)_{k\geq 1},(b_k)_{k\geq 0}\right\},(f_k)_{k\geq 0}\right)$ *mit* $a_k \neq 0$ *für alle* k *und*

$$f_n = b_0 + \frac{a_1 \rfloor}{\lceil b_1} + \frac{a_2 \rfloor}{\lceil b_2} + \ldots + \frac{a_n \rfloor}{\lceil b_n} \text{ für } n \geq 0.$$

Die a_k *heißen partielle Zähler, die* b_k *partielle Nenner des Kettenbruchs. Beide werden auch als Elemente des Kettenbruchs bezeichnet.*
f_n *heißt der* n*-te Näherungsbruch oder die* n*-te Konvergente des Kettenbruchs.*

Definition (Kettenbruch, partielle Zähler und Nenner, n-ter Näherungsbruch)

Ein Kettenbruch ist ein geordnetes Paar von komplexen Folgen $(\{(a_k)_{k\geq 1}, (b_k)_{k\geq 0}\}, (f_k)_{k\geq 0})$ *mit* $a_k \neq 0$ *für alle* k *und*

$$f_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_n|}{|b_n} \text{ für } n \geq 0.$$

Die a_k *heißen partielle Zähler, die* b_k *partielle Nenner des Kettenbruchs. Beide werden auch als Elemente des Kettenbruchs bezeichnet.*
f_n *heißt der* n*-te Näherungsbruch oder die* n*-te Konvergente des Kettenbruchs.*

Definition (Konvergenz)

Der Kettenbruch $b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \frac{a_k}{b_k}$ *heißt konvergent genau dann, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

existiert.

Satz (Rekursionsformeln)

Die kanonischen Zähler A_n und kanonischen Nenner B_n der n-ten Näherungsbrüche f_n des Kettenbruchs $b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathcal{K}}} \frac{a_k}{b_k}$ erfüllen für $n \geq 1$ die Rekursionsformeln

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = b_n \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{bmatrix} + a_n \begin{bmatrix} A_{n-2} \\ B_{n-2} \end{bmatrix}$$

mit den Startwerten $A_{-1} = 1, A_0 = b_0, B_{-1} = 0, B_0 = 1$.

Definition (Äquivalenz von Kettenbrüchen)

Zwei Kettenbrüche $(\{(a_k)_{k\geq 1}, (b_k)_{k\geq 0}\}, (f_k)_{k\geq 0})$ *und* $(\{(c_k)_{k\geq 1}, (d_k)_{k\geq 0}\}, (g_k)_{k\geq 0})$ *sind genau dann äquivalent, wenn gilt*

$$f_n = g_n \text{ für } n \geq 0.$$

Definition (Äquivalenz von Kettenbrüchen)

Zwei Kettenbrüche $(\{(a_k)_{k\geq 1}, (b_k)_{k\geq 0}\}, (f_k)_{k\geq 0})$ *und* $(\{(c_k)_{k\geq 1}, (d_k)_{k\geq 0}\}, (g_k)_{k\geq 0})$ *sind genau dann äquivalent, wenn gilt*

$$f_n = g_n \text{ für } n \geq 0.$$

Satz (Äquivalenztransformation)

Zwei Kettenbrüche $b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k}$ *und* $d_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{d_k}$ *sind genau dann äquivalent, wenn eine komplexe Folge* $(r_k)_{k\geq 0}$ *existiert mit* $r_0 = 1$, $r_k \neq 0$ *für* $k \geq 1$ *und*

$$d_0 = b_0,\ c_k = r_k r_{k-1} a_k,\ d_k = r_k b_k \text{ für } k \geq 1.$$

Definition (regulärer Kettenbruch)

Ein Kettenbruch der Form

$$b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}$$

mit $b_0 \in \mathbb{Z}, b_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ *heißt regulärer Kettenbruch.*

Definition (regulärer Kettenbruch)

Ein Kettenbruch der Form

$$b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}$$

mit $b_0 \in \mathbb{Z}, b_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ *heißt regulärer Kettenbruch.*

Definition (C-Kettenbruch)

Ein Kettenbruch in einer komplexen Variable z der Form

$$b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k z^{\alpha_k}}{1}$$

mit $b_0 \in \mathbb{C}, a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \alpha_k \in \mathbb{N}$ *heißt C-Kettenbruch (C-Fraction, von corresponding fraction).*
Sind alle $\alpha_k = 1$*, so heißt der C-Kettenbruch regulär.*

Inhalt

Potenzreihen sind ein Standardwerkzeug für die Approximation von komplexen Funktionen.
Ein Nachteil: Nicht immer konvergieren diese Potenzreihen auf dem gesamten Definitionsbereich, meist haben sie nur einen endlichen Konvergenzradius.

Potenzreihen sind ein Standardwerkzeug für die Approximation von komplexen Funktionen.
Ein Nachteil: Nicht immer konvergieren diese Potenzreihen auf dem gesamten Definitionsbereich, meist haben sie nur einen endlichen Konvergenzradius.

Beispiel

Wegen der Singularität an der Stelle $z = -1$ kann die Taylorreihe von $\log(1 + z)$ nur einen Konvergenzradius von höchstens 1 besitzen. Nah an der Stelle $z = -1$ wird die Approximation durch Taylorpolynome extrem ungenau.

Potenzreihen sind ein Standardwerkzeug für die Approximation von komplexen Funktionen.
Ein Nachteil: Nicht immer konvergieren diese Potenzreihen auf dem gesamten Definitionsbereich, meist haben sie nur einen endlichen Konvergenzradius.

Beispiel

Wegen der Singularität an der Stelle $z = -1$ kann die Taylorreihe von $\log(1 + z)$ nur einen Konvergenzradius von höchstens 1 besitzen. Nah an der Stelle $z = -1$ wird die Approximation durch Taylorpolynome extrem ungenau.

Versuche stattdessen, komplexe Funktionen durch rationale Funktionen statt Polynome zu approximieren, um Singularitäten durch Polstellen besser handhaben zu können.

Definition (Padé-Approximant)

Sei $S(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k, c_k \in \mathbb{C}, c_0 \neq 0$ *eine formale Potenzreihe, dann ist der Padé-Approximant der Ordnung* $[m,n]$ *von* $S(z)$ *die gekürzte Form*

$$R_{m,n}(z) = \frac{P_{m,n}(z)}{Q_{m,n}(z)}$$

mit $Q_{m,n}(0) = 1$ *der rationalen Funktion* $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *mit*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k,\ a_k \in \mathbb{C},$$

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k,\ b_k \in \mathbb{C},$$

$$S(z)Q(z) - P(z) = \mathcal{O}(z^{m+n+1}).$$

$R_{m,n}(z)$ lässt sich immer mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus konstruieren.

$R_{m,n}(z)$ lässt sich immer mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus konstruieren.

Definition (Padé-Tabelle)

Die Padé-Approximanten $R_{m,n}(z)$ werden wie folgt in der Padé-Tabelle angeordnet:

$$\begin{array}{cccc} R_{0,0} & R_{0,1} & R_{0,2} & \dots \\ R_{1,0} & R_{1,1} & \dots & \\ R_{2,0} & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & & \end{array}$$

Identische Einträge tauchen ausschließlich in zusammenhängenden, quadratischen Blöcken auf.

In der Padé-Tabelle der formalen Potenzreihe $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ ist die Spaltenfolge

$$R_{0,0}, R_{1,0}, R_{2,0}, \ldots$$

die Folge der Partialsummen $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$.

In der Padé-Tabelle der formalen Potenzreihe $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ ist die Spaltenfolge

$$R_{0,0}, R_{1,0}, R_{2,0}, \ldots$$

die Folge der Partialsummen $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$.

Definition (normale Padé-Approximanten, normale Padé-Tabelle)

Ein Padé-Approximant heißt normal genau dann, wenn er nur ein einziges Mal in der Padé-Tabelle auftaucht.
Entsprechend heißt eine Padé-Tabelle genau dann normal, wenn ihre Einträge paarweise verschieden sind.

Satz (Zusammenhang zwischen Padé-Tabelle und regulärem C-Kettenbruch)

Sind die entsprechenden Padé-Approximanten alle normal, ist die absteigende Treppenfolge

$$R_{0,0}, R_{1,0}, R_{1,1}, R_{2,1}, \ldots$$

die Folge der Konvergenten $f_n = c_0 + \mathop{\mathrm{K}}\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k z}{1}$ *des zu* $S(z)$ *korrespondierenden regulären C-Kettenbruchs.*

Satz (Zusammenhang zwischen Padé-Tabelle und regulärem C-Kettenbruch)

Sind die entsprechenden Padé-Approximanten alle normal, ist die absteigende Treppenfolge

$$R_{0,0}, R_{1,0}, R_{1,1}, R_{2,1}, \ldots$$

die Folge der Konvergenten $f_n = c_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k z}{1}$ *des zu* $S(z)$ *korrespondierenden regulären C-Kettenbruchs.*

Sind die Glieder der Treppenfolge nicht normal, kann dennoch ein entsprechender C-Kettenbruch existieren, allerdings kein regulärer.

Beispiel: Padé-Tabelle für $S(z) = 1 + \log(1+z)$

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{1}{1-z+3z^2/2}$	$\frac{1}{1-z+3z^2/2-7z^3/3}$	$\cdots$
$\frac{1+z}{1}$	$\frac{1+3z/2}{1+z/2}$	$\frac{1+14z/9}{1+5z/9-z^2/18}$	$\frac{1+11z/7}{1+4z/7-z^2/14+z^3/42}$	$\cdots$
$\frac{1+z-z^2/2}{1}$	$\frac{1+5z/3+z^2/6}{1+2z/3}$	$\frac{1+z+z^2/3}{1+2z+z^2/6}$	$\frac{1+43z/20+9z^2/10}{1+23z/20+z^2/4-z^3/120}$	$\cdots$
$\frac{1+z-z^2/2+z^3/3}{1}$	$\frac{1+7z/4+z^2/4-z^3/24}{1+3z/4}$	$\frac{1+11z/5+z^2+z^3/30}{1+6z/5+3z^2/10}$	$\frac{1+5z/2+5z^2/8+7z^3/30}{1+3z/2+3z^2/5+z^3/20}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Die erste Spalte enthält die Partialsummen der Reihe

$$1 + \log(1+z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{k}.$$

Die absteigende Treppenfolge umfasst die Konvergenten des regulären C-Kettenbruchs

$$1 + \log(1+z) = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1} \text{ mit } a_k = \begin{cases} 1 & , k = 1 \\ \frac{1}{4}\frac{k}{k-1} & , k \text{ gerade} \\ \frac{1}{4}\frac{k-1}{k} & , k > 1 \text{ ungerade} \end{cases} .$$

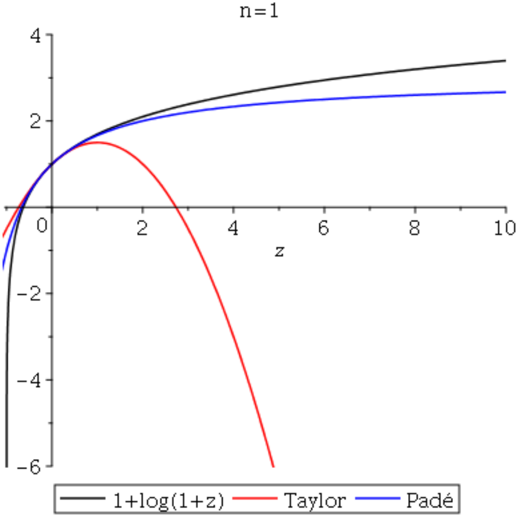
Die absteigende Treppenfolge umfasst die Konvergenten des regulären C-Kettenbruchs

$$1 + \log(1+z) = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1} \text{ mit } a_k = \begin{cases} 1 & , k = 1 \\ \frac{1}{4}\frac{k}{k-1} & , k \text{ gerade} \\ \frac{1}{4}\frac{k-1}{k} & , k > 1 \text{ ungerade} \end{cases} .$$

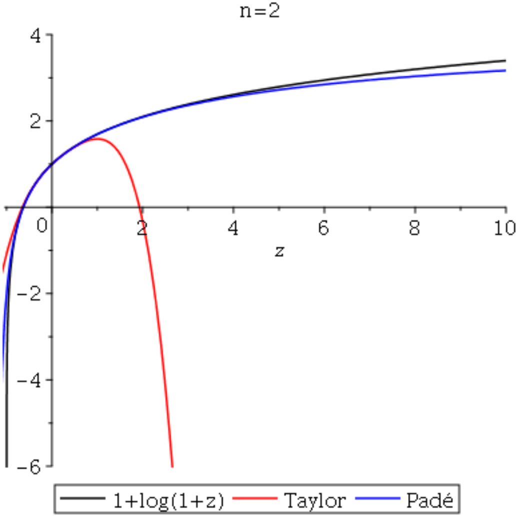
$$\frac{1}{1} = 1,\ \frac{1+z}{1} = 1 + \frac{z}{1},\ \frac{1+3z/2}{1+z/2} = 1 + \cfrac{z}{1+\cfrac{z/2}{1}},\ \ldots$$

Inhalt

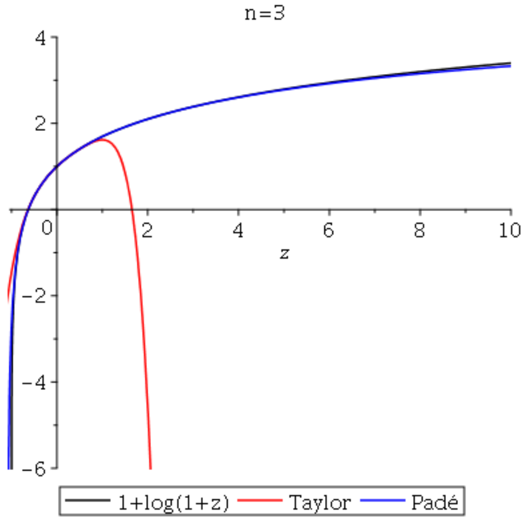
Vergleich von Taylor der Ordnung $2n$ und Padé der Ordnung $[n, n]$ in $\mathbb{R}$



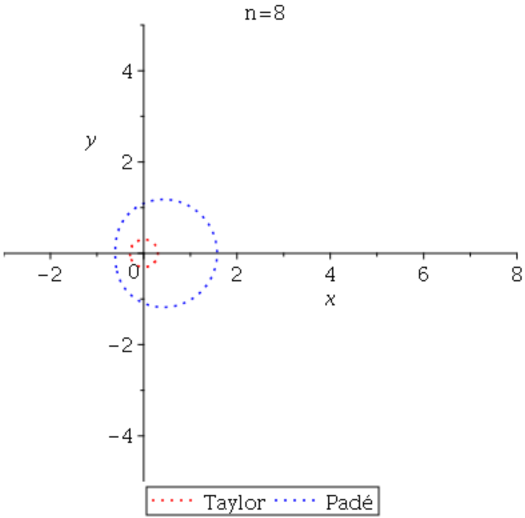
Vergleich von Taylor der Ordnung $2n$ und Padé der Ordnung $[n, n]$ in $\mathbb{R}$



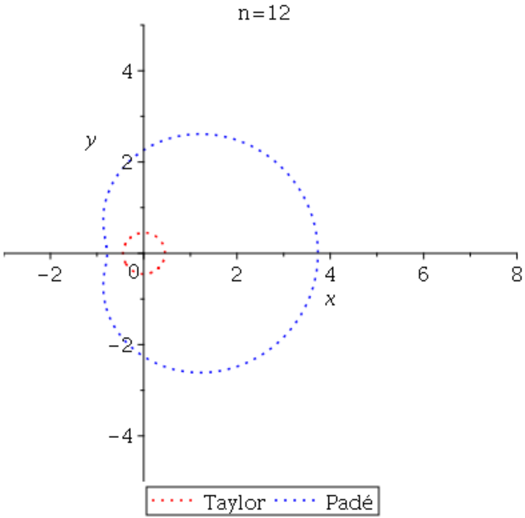
Vergleich von Taylor der Ordnung $2n$ und Padé der Ordnung $[n, n]$ in $\mathbb{R}$



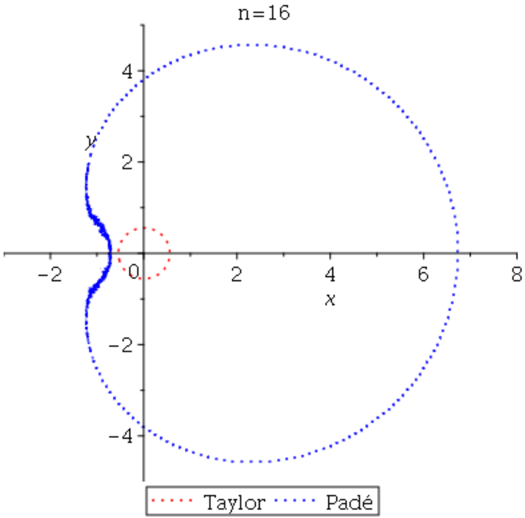
Gebiete mit Fehler $< 10^{-10}$ für Taylor der Ordnung $2n$ und Padé der Ordnung $[n, n]$ in $\mathbb{C}$



Gebiete mit Fehler $< 10^{-10}$ für Taylor der Ordnung $2n$ und Padé der Ordnung $[n, n]$ in $\mathbb{C}$



Gebiete mit Fehler $< 10^{-10}$ für Taylor der Ordnung $2n$ und Padé der Ordnung $[n, n]$ in $\mathbb{C}$



Fazit

Obwohl die Taylorreihe von $1 + \log(1 + z)$ nur den Konvergenzradius $r = 1$ besitzt, lässt sich aus ihr eine Darstellung gewinnen, die auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ konvergiert!

Inhalt

Ziel: Geschlossene Formeln für die partiellen Zähler des C-Kettenbruchs zu einer gegebenen Potenzreihe

Ziel: Geschlossene Formeln für die partiellen Zähler des C-Kettenbruchs zu einer gegebenen Potenzreihe

Eine angepasste Form des Quotienten-Differenzen-Algorithmus lässt sich zur Konstruktion von Kettenbrüchen verwenden und war eines der Hauptwerkzeuge bei der Erstellung des *Handbook of Continued Fractions for Special Functions* (Cuyt et al. 2008).

Ziel: Geschlossene Formeln für die partiellen Zähler des C-Kettenbruchs zu einer gegebenen Potenzreihe

Eine angepasste Form des Quotienten-Differenzen-Algorithmus lässt sich zur Konstruktion von Kettenbrüchen verwenden und war eines der Hauptwerkzeuge bei der Erstellung des *Handbook of Continued Fractions for Special Functions* (Cuyt et al. 2008).

Definition (QD-Tabelle)

Die Werte $q_l^{(k)}, e_l^{(k)}$ *werden in der QD-Tabelle wie folgt angeordnet:*

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & q_1^{(0)} & & q_2^{(-1)} & & \dots & \\
e_0^{(1)} & & e_1^{(0)} & & e_2^{(-1)} & & \dots \\
 & q_1^{(1)} & & q_2^{(0)} & & & \ddots \\
e_0^{(2)} & \vdots & e_1^{(1)} & \vdots & e_2^{(0)} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}
$$

Definition (QD-Algorithmus, Rautenregeln)

Setze zu einer gegeben Potenzreihe $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *die Werte der ersten beiden Spalten auf*

$$e_0^{(k+1)} = 0 \text{ und } q_1^{(k)} = \frac{c_{k+1}}{c_k}, \; k \geq 0.$$

Dann erhält man die übrigen Werte unterhalb der Hauptdiagonale $e_0^{(1)}, q_1^{(1)}, e_1^{(1)}, \ldots$ *spaltenweise durch die Rautenregeln*

$$e_l^{(k)} = q_l^{(k+1)} - q_l^{(k)} + e_{l-1}^{(k+1)}, \; l \geq 1, \; k \geq 1,$$

und

$$q_{l+1}^{(k)} = \frac{e_l^{(k+1)}}{e_l^{(k)}} q_l^{(k+1)}, \; l \geq 1, \; k \geq 1.$$

Definition (Progressive Form)

Die numerisch stabilere, progressive Form des QD-Algorithmus füllt die Tabelle stattdessen zeilenweise oberhalb der Hauptdiagonale durch die entsprechend umgeformten Rautenregeln mit den Startwerten

$$q_1^{(0)} = -\frac{d_1}{d_0},\ \ q_{k+1}^{(-k)} = 0,\ \ k \geq 1,$$

und

$$e_0^{(1)} = 0,\ \ e_1^{(0)} = \frac{d_2}{d_1},\ \ e_{k+1}^{(-k)} = \frac{d_{k+2}}{d_{k+1}},\ \ k \geq 1.$$

Die d_k ergeben sich dabei aus $\dfrac{1}{S(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$.

Satz (Zusammenhang mit C-Kettenbrüchen)

Sei $S(z)$ eine Potenzreihe deren Padé-Tabelle normal ist, dann sind die Koeffizienten des korrespondierenden regulären C-Kettenbruchs

$$a_1 = c_1, \; a_{2l} = -q_l^{(1)}, \; a_{2l+1} = -e_l^{(1)}, \; l \geq 1,$$

wobei sich die $q_l^{(1)}, e_l^{(1)}$ mit dem QD-Algorithmus bestimmen lassen.

Satz (Zusammenhang mit C-Kettenbrüchen)

Sei $S(z)$ eine Potenzreihe deren Padé-Tabelle normal ist, dann sind die Koeffizienten des korrespondierenden regulären C-Kettenbruchs

$$a_1 = c_1,\ a_{2l} = -q_l^{(1)},\ a_{2l+1} = -e_l^{(1)},\ l \geq 1,$$

wobei sich die $q_l^{(1)}, e_l^{(1)}$ mit dem QD-Algorithmus bestimmen lassen.

Problem: Der QD-Algorithmus liefert *nur* die ersten n partiellen Zähler, auf deren Grundlage eine allgemeine Formel für a_k vermutet und bewiesen werden kann. Idealerweise soll aber auch dieser zweite Schritt algorithmisch erfolgen.

Inhalt

Der Guess-and-Prove-Algorithmus (Maulat, Salvy 2015) berechnet eine mögliche Formel für die Elemente eines C-Kettenbruchs, der Lösung einer Differentialgleichung ist, und versucht anschließend diese Formel zu beweisen.

Der Guess-and-Prove-Algorithmus (Maulat, Salvy 2015) berechnet eine mögliche Formel für die Elemente eines C-Kettenbruchs, der Lösung einer Differentialgleichung ist, und versucht anschließend diese Formel zu beweisen.

Raten

Gegeben sei eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$D: \; Y' = F(z, Y), Y(0) = 0,$$

wobei F ein Polynom in Y und rational in z ist.

Der Guess-and-Prove-Algorithmus (Maulat, Salvy 2015) berechnet eine mögliche Formel für die Elemente eines C-Kettenbruchs, der Lösung einer Differentialgleichung ist, und versucht anschließend diese Formel zu beweisen.

Raten

Gegeben sei eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$D: \; Y' = F(z, Y), Y(0) = 0,$$

wobei F ein Polynom in Y und rational in z ist.

- D besitzt eine eindeutige Potenzreihenlösung $S(z)$.

Der Guess-and-Prove-Algorithmus (Maulat, Salvy 2015) berechnet eine mögliche Formel für die Elemente eines C-Kettenbruchs, der Lösung einer Differentialgleichung ist, und versucht anschließend diese Formel zu beweisen.

Raten

Gegeben sei eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$D: \; Y' = F(z, Y), Y(0) = 0,$$

wobei F ein Polynom in Y und rational in z ist.

- D besitzt eine eindeutige Potenzreihenlösung $S(z)$.
- Berechne mit dieser die ersten n Elemente des korrespondierenden C-Kettenbruchs.

Der Guess-and-Prove-Algorithmus (Maulat, Salvy 2015) berechnet eine mögliche Formel für die Elemente eines C-Kettenbruchs, der Lösung einer Differentialgleichung ist, und versucht anschließend diese Formel zu beweisen.

Raten

Gegeben sei eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$D: \; Y' = F(z, Y), Y(0) = 0,$$

wobei F ein Polynom in Y und rational in z ist.

- D besitzt eine eindeutige Potenzreihenlösung $S(z)$.
- Berechne mit dieser die ersten n Elemente des korrespondierenden C-Kettenbruchs.
- Rate eine allgemeine Formel für $a_k(z)$, z.B. durch rationale Interpolation.

Der Guess-and-Prove-Algorithmus (Maulat, Salvy 2015) berechnet eine mögliche Formel für die Elemente eines C-Kettenbruchs, der Lösung einer Differentialgleichung ist, und versucht anschließend diese Formel zu beweisen.

Raten

Gegeben sei eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$D: \; Y' = F(z, Y), Y(0) = 0,$$

wobei F ein Polynom in Y und rational in z ist.

- D besitzt eine eindeutige Potenzreihenlösung $S(z)$.
- Berechne mit dieser die ersten n Elemente des korrespondierenden C-Kettenbruchs.
- Rate eine allgemeine Formel für $a_k(z)$, z.B. durch rationale Interpolation.
- Es bleibt die Frage: Ist die Formel korrekt?

Beweisen

Die Formel ist korrekt, wenn die Konvergenten f_n des geratenen Kettenbruchs gegen $S(z)$ konvergieren, oder gleichbedeutend falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{val}(S - f_n) = \infty.$$

Beweisen

Die Formel ist korrekt, wenn die Konvergenten f_n des geratenen Kettenbruchs gegen $S(z)$ konvergieren, oder gleichbedeutend falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{val}(S - f_n) = \infty.$$

Satz

Die Näherungsbrüche f_n konvergieren genau dann gegen die eindeutige Potenzreihenlösung $S(z)$ der Differentialgleichung $D: \; Y' = F(z, Y), Y(0) = 0$, wenn $f_n(0) = 0$ für genügend große n und

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{val}(f_n'(z) - F(z, f_n(z))) = \infty.$$

Ist d der Grad von F in Y und $f_n = \frac{A_n}{B_n}$, setze

$$H_n := B_n^{\max(2,d)} \left(\left(\frac{A_n}{B_n} \right)' - F\left(z, \frac{A_n}{B_n}\right) \right).$$

Aus $a_k(0) = 0$ für $k \geq 1$ folgt mit den Rekursionsformeln für Kettenbrüche $B_n(0) = 1$ für $n \geq 0$. Also gilt

$$\mathrm{val}(H_n) = \mathrm{val}(f_n'(z) - F(z, f_n(z))).$$

Drückt man A_{n+k}, B_{n+k} mit den Rekursionsformeln in Abhängigkeit von A_n,A_{n+1},B_n,B_{n+1} aus, so lässt sich H_{n+k} schreiben als Linearkombination von Monomen von Grad d in A_n,A_{n+1},B_n,B_{n+1} und deren Ableitungen.

Drückt man A_{n+k}, B_{n+k} mit den Rekursionsformeln in Abhängigkeit von A_n,A_{n+1},B_n,B_{n+1} aus, so lässt sich H_{n+k} schreiben als Linearkombination von Monomen von Grad d in A_n,A_{n+1},B_n,B_{n+1} und deren Ableitungen.

Es gibt nur endlich viele solcher Monome, so dass mit linearer Algebra eine lineare Rekursionsgleichung für H_n berechnet werden kann. Im Allgemeinen hat diese lineare Rekursionsgleichung eine hohe Ordnung.

Drückt man A_{n+k}, B_{n+k} mit den Rekursionsformeln in Abhängigkeit von A_n,A_{n+1},B_n,B_{n+1} aus, so lässt sich H_{n+k} schreiben als Linearkombination von Monomen von Grad d in A_n,A_{n+1},B_n,B_{n+1} und deren Ableitungen.

Es gibt nur endlich viele solcher Monome, so dass mit linearer Algebra eine lineare Rekursionsgleichung für H_n berechnet werden kann. Im Allgemeinen hat diese lineare Rekursionsgleichung eine hohe Ordnung.

Versuche algorithmisch durch Berechnen von Rechtsfaktoren eine lineare Rekursionsgleichung niedrigerer Ordnung zu finden, so dass $\mathrm{val}(H_n)$ offensichtlich unbeschränkt mit n wächst.

$\rightsquigarrow$ Maple-Demo

Literatur

- CUYT, Annie; BREVIK PETERSEN, Vigdis; VERDONK, Brigitte; WAADELAND, Haakon; JONES, William B.: *Handbook of Continued Fractions for Special Functions*. New York: Springer, 2008
- MAULAT, Sébastien; SALVY, Bruno: Formulas for Continued Fractions. An Automated Guess and Prove Approach. In: *ISSAC 15: Proceedings of the 2015 ACM International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation* (2015), S. 275-282
- LORENTZEN, Lisa; WAADELAND, Haakon: *Continued Fractions with Applications*. Amsterdam: North-Holland, 1992