Konstruktive Theorie Inverser Systeme

Matthias Orth

4. Mai 2017

Inhalt

Einleitung (1)

1. Inverse Systeme beschreiben die lineare Struktur von Polynomidealen
2. Sie gehen auf F. S. Macaulay (1916) zurück
3. Sie werden aktuell bspw. in der numerischen algebraischen Geometrie benutzt
4. Sie können durch Gröbnerbasen beschrieben werden...
5. aber auch zur Berechnung von Gröbnerbasen zu anderen Termordnungen verwendet werden.

Einleitung (2)

1. Verschiedene Schreibweisen in der Literatur
   - Potenzreihen mit negativen Exponenten
   - Lineare Differentialoperatoren + Auswertung an einem Punkt
2. Ziel 1: Wichtige Ergebnisse der Theorie in gut zugänglicher Notation präsentieren
3. Ziel 2: Konstruktive Verfahren angeben, wenn möglich mit Pommaretbasen

Der Polynomring $\mathcal{P}$ und sein Dualraum

1. Arbeite im Polynomring $\mathcal{P} = K[x_1, \ldots, x_n]$
2. Menge der Terme $\mathbb{T}^n = \{x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \mid (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n\}$
3. $\mathcal{P}$ als K-Vektorraum $\langle \mathbb{T}^n \rangle_K$
4. Dualraum $\mathcal{P}^\star$: Menge der Linearformen $\alpha : \mathcal{P} \to K$
5. Jedes α ist durch die Werte auf der Basis $\mathbb{T}^n$ eindeutig bestimmt
6. Schreibe $\mathcal{P}^\star \ni x^{-\mu} := (x^\mu \mapsto 1, x^\rho \neq x^\mu \Rightarrow x^\rho \mapsto 0)$
7. Formale Reihe
$$\alpha = \sum_{x^\mu \in \mathbb{T}^n} \alpha(x^\mu) x^{-\mu}$$

Das inverse System eines Ideals

1. Das *inverse System* zu $I \leq \mathcal{P}$:

$$I^0 := \{\alpha \in \mathcal{P}^\star \mid \alpha(I) = \{0\}\}$$

2. $\mathcal{P}^\star$ ist ein $\mathcal{P}$-Modul mittels

$$\forall f, g \in \mathcal{P}, \alpha \in \mathcal{P}^\star : (f \cdot \alpha)(g) := \alpha(gf)$$

3. I^0 ist ein $\mathcal{P}$-Untermodul von $\mathcal{P}^\star$
4. Ist $Y \leq \mathcal{P}^\star$ ein $\mathcal{P}$-Untermodul, dann ist

$$Y^0 := \{f \in \mathcal{P} \mid Y(f) = \{0\}\}$$

ein Ideal in $\mathcal{P}$.

Dualität zwischen I und I^0

Theorem

Es gibt eine bijektive inklusionsumkehrende Abbildung zwischen der Menge der nulldimensionalen Ideale $I \leq \mathcal{P}$ und der Menge der endlichdimensionalen $\mathcal{P}$-Untermoduln von $\mathcal{P}^\star$. Sie ist gegeben durch die Vorschrift $I \mapsto I^0$.

Berechnung von I^0 über Gröbnerbasis

I sei ein nulldimensionales Ideal.

1. $\mathcal{G}$ Gröbnerbasis von I, $B := \mathbb{T}^n \setminus \mathrm{lt}(I)$
2. Die Zuordnung $\mathcal{P} \to \langle B \rangle_K, f \mapsto \mathrm{NF}_{\mathcal{G}}(f)$ ist linear
3. Wir erhalten $|B|$ lineare Funktionale $\varphi_\nu := x^{-\nu} \circ \mathrm{NF}_{\mathcal{G}}$, $x^\nu \in B$
4. Eigenschaften von $\mathrm{NF}_{\mathcal{G}} \rightsquigarrow \{\varphi_\nu \mid x^\nu \in B\}$ ist K-linear unabhängige Teilmenge von I^0, also K-Basis

Berechnung einer Gröbnerbasis aus I^0

1. gegeben: $C \subset \mathcal{P}^\star$ endliche K-linear unabhängige Menge mit $\langle C \rangle_\mathcal{P} = \langle C \rangle_K$
2. $C = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, dann betrachte die $k \times \mathbb{N}$-„Matrix“$(\alpha_i(x^\nu))$
3. Problem der GB-Bestimmung ist gleichwertig zur Aufgabe, diese Matrix in Treppenform zu bringen, abhängig von TO $\prec$.

Ordnungsideale

1. Betrachte zu $x^\mu \in \mathbb{T}^n$ die Menge
$$\mathcal{O}(x^\mu) := \{\textit{Teiler von } x^\mu\}.$$
2. $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{T}^n$ heißt *Ordnungsideal*, wenn gilt:
$$\forall x^\mu \in \mathcal{T} : \mathcal{O}(x^\mu) \subseteq \mathcal{T}.$$
3. endliche Ordnungsideale $\mathcal{T}$ besitzen eindeutige unverkürzbare Darstellung
$$\mathcal{T} = \bigcup_{x^\gamma \in \mathcal{T}_{\mathrm{max}}} \mathcal{O}(x^\gamma).$$
4. $\mathcal{T}_{\mathrm{max}}$ sind die in $\mathcal{T}$ unter Teilbarkeit maximalen Elemente.

Monomiale Ideale

Theorem

Ist $I \leq \mathcal{P}$ ein nulldimensionales monomiales Ideal und $B := \mathbb{T}^n \setminus I$ sein zugehöriges Ordnungsideal, dann gilt:

$$I^0 = \langle x^{-\gamma} \mid x^\gamma \in B_{\max} \rangle_{\mathcal{P}}.$$

Pommaretbasen

1. Die *Pommaretdivision* weist jedem Term multiplikative Variablen zu:
2. Setze $\mathrm{cls}(x^\mu) := \min\{i \in \{1,\ldots,n\} : x_i | x^\mu\}$
3. Dann sind $x_1, \ldots, x_{\mathrm{cls}(x^\mu)}$ multiplikativ für x^μ, die anderen Variablen sind nichtmultiplikativ
4. Jedes monomiale Ideal besitzt eindeutige minimale Teilmenge (kann unendlich sein!), die es im Kontext der Pommaretdivision erzeugt (disjunkte Zerlegung in Pommaretkegel)
5. Wenn diese Menge endlich ist, sagt man, das Ideal *besitzt eine Pommaretbasis* bzw. ist *quasi-stabil*

Eine Verbindung zwischen $B_{\max}$ und der Pommaretbasis

1. Ein nulldimensionales monomiales Ideal I besitzt immer eine Pommaretbasis.
2. Die Pommaretbasis $\mathcal{H}$ lässt sich kompakt aufschreiben: Jedem minimalen Erzeuger des Ideals lässt sich ein Ordnungsideal der nötigen *Prolongationsterme* zuweisen. Dieses lässt sich durch seine maximalen Ecken beschreiben.
3. $B_{\max}$ lässt sich an den maximalen Ecken der Prolongationsterme der Erzeuger *von Klasse 1* ablesen.
4. Die Prolongations-Ecken könen algorithmisch von Klasse n nach Klasse 1 absteigend ermittelt werden.

Ein $\mathcal{P}$-Erzeugendensystem von I^0

I sei ein nulldimensionales Polynomideal, $B := \mathbb{T}^n \setminus \mathrm{lt}_\prec I$ das zugehörige Ordnungsideal bezüglich der Termordnung $\prec$, $\mathcal{G}$ die reduzierte Gröbnerbasis bezüglich $\prec$.

Theorem

Die Menge $\{x^{-\nu} \circ \mathrm{NF}_\mathcal{G} \mid x^\nu \in B_{\max}\}$ ist ein $\mathcal{P}$-Erzeugendensystem von I^0. Es braucht nicht minimal zu sein.

Spezialfall: Homogene nulldimensionale Ideale

1. Hier gilt $\sqrt{I} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle_{\mathcal{P}} := m$.
2. *Sockel* von I: $\{f \in \mathcal{P} \mid \forall i : x_i f \in I\} =: I : m$
3. Mit Hilfe des Nakayama-Lemmas kann man zeigen, dass

$$\{x^{-\nu} \circ \mathrm{NF}_{\mathcal{G}} \mid x^{\nu} \in B_{\max} \wedge x^{\nu} \in \mathrm{lt}_{\prec}(I : m)\}$$

   ein minimales $\mathcal{P}$-Erzeugendensystem von I^0 ist.
4. Kennt man die Pommaretbasis von I, kann man den Sockel mittels Lösen linearer Gleichungssysteme berechnen.

Ausblick

1. Untersuche, ob sich der Algorithmus zur Berechnung der maximalen Ecken erweitern lässt, um freie Auflösungen monomialer Ideale berechnen zu können.
2. Versuche, die minimale freie Auflösung eines quasi-stabilen monomialen Ideals explizit anzugeben.

Schluss

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!