Einführung in das symbolische Rechnen – eine Lehrveranstaltung zwischen Mathematik und Informatik

Hans-Gert Gräbe
Institut für Informatik, Universität Leipzig

28. April 2000

Einleitung

Nach dem Siegeszug von Taschenrechnern und Numerik-Paketen spielen heute Computeralgebra-Systeme (CAS) im ingenieurtechnischen Bereich eine zunehmend wichtige Rolle. Mit ihnen wird es möglich, auch stärker formalisiertes mathematisches Wissen in algorithmisch aufbereiteter Form zur Verfügung zu stellen und damit in breitem Umfang Berechnungen einzusetzen, die bisher Spezialisten vorbehalten waren. Solche Fähigkeiten werden in absehbarer Zeit den Kern umfassenderer Wissensrepräsentationssysteme bilden und die heute im naturwissenschaftlich-technischen Bereich anzutreffende Zweieinigkeit aus Taschenrechner und Formel- und Tabellensammlung ablösen.

Damit gehört der souveräne Umgang mit solchen Systemen zu einer der Grundfertigkeiten, die von Hochschul-Absolventen wenigstens des mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereichs in Zukunft erwartet werden.

In der Diskussion wird immer wieder die Frage gestellt, ob man nicht angesichts dieser Entwicklungen die Mathematik-Ausbildung in der Schule und vielleicht auch im Studium deutlich reduzieren könne, wo die CAS doch sowieso alles beherrschen, was ein "normaler Mensch" an Mathematik irgend wann einmal benötigt. Die entstehenden Freiräume könnte man nutzen, um den Umgang mit derartigen Systemen zu üben, also "Medienkompetenz" zu erwerben.

Mit dieser Frage wird man sich in einem Land, dessen Schülern die TIMS-Studie eine latente Mathephobie diagnostiziert, sehr ernsthaft auseinander setzen müssen. Dies um so mehr, als auch immer wieder Politiker für ihr Eingeständnis "In Mathe war ich immer schlecht" Beifall ernten, der ihnen bei der Äußerung "Shakespeare, wer ist das?" nur bedingt zu Teil geworden wäre.

Ich möchte deshalb zunächst einige Argumente zusammentragen, mit denen sich die Stellung der Computeralgebra im Wissenschaftsgebäude genauer bestimmen lässt. Aus diesen Überlegungen werde ich einige allgemeine Konsequenzen zur curricularen Verankerung der Computeralgebra ableiten und darauf aufbauend schließlich zum Thema kommen, das im Titel angekündigt ist.

Vorab sei noch bemerkt, dass im deutschsprachigen Raum die Begriffe "symbolisches Rechnen" und "Computeralgebra" gewöhnlich synonym zur Kennzeichnung des Fachgebiets verwendet werden, um das es in diesem Beitrag geht. Ich werde im Weiteren den Begriff "symbolisches Rechnen" verwenden, wenn ich den Blick stärker auf die Potenzen des Fachgebiets fokussiere, den Begriff "Computeralgebra" dagegen, wenn ich dessen aktuelle Möglichkeiten thematisieren möchte.

Zur Stellung des symbolischen Rechnens im Wissenschaftsgebäude

Ein Blick in die Geschichte (und [2]) lehrt, dass es den heute geläufigen Wissenschaftsbegriff mit seinen mannigfachen Verzweigungen und Verästelungen noch gar nicht so lange gibt. Bis hinein ins Mittelalter wurde Wissenschaft ganzheitlich und mit dem Anspruch betrieben, die Welt in ihrer gesamten Komplexität zu begreifen. Für Goethes Faust galt es noch, Philosophie, Medizin, Juristerei und Theologie, die vier Zweige eines klassischen wissenschaftlichen Studiums jener Zeit, nicht alternativ, sondern gemeinsam und in ihrer gegenseitigen Wechselbeziehung zu studieren. Zugleich war das Wissenschaftlerdasein elitär geprägt und "das Privileg meist wohlhabender, oft adliger Privatgelehrter". Im Alltag spielten wissenschaftliche Kenntnisse eine absolut untergeordnete Rolle, ja selbst aus heutiger Sicht elementare Grundfertigkeiten wie Lesen, Schreiben und Rechnen waren kaum verbreitet.

Das änderte sich grundlegend mit dem Aufbruch ins Industriezeitalter. Dieses begann mit der Trennung zwischen Geistes- und Naturwissenschaften, genauer gesagt mit der Abspaltung der letzteren, die sich, statt ganzheitlicher Beschreibungen, stärker auf funktionale und kausale Erklärungen von einzelnen Phänomenen ausrichten. Ein solches Verständnis ist die Basis und ermöglicht erst das "Eingreifenkönnen und Beherrschen natürlicher Prozesse und Dinge".

Ursache für diese veränderte Stellung von Wissenschaft sind zweifelsohne die gewachsenen Anforderungen, die ein industriell organisierter Arbeitsprozess sowohl an die beteiligten Akteure als auch an die geistige Durchdringung der Prozesse selbst stellt. Diese Art *wissenschaftlicher Rationalität* wird im Folgenden zum beherrschenden Wissenstypus im Bereich der Natur- und Technikwissenschaften, denen wir uns im Weiteren ausschließlich zuwenden werden. Zugleich beginnt Wissenschaft auch im Alltag eine wichtigere Rolle einzunehmen; abzulesen etwa in der Einrichtung von Volksschulen, die die Fertigkeiten des Lesens, Schreibens und Rechnens verbreiten.

Ein solcher Rationalitätsbegriff prägt das heutige Selbstverständnis der einzelnen Naturwissenschaften (Physik, Chemie, Biologie, …) als Fachwissenschaften: sie haben als Ziel, in der Natur ablaufende Prozesse aus der Sicht ihres jeweiligen Fachgebiets adäquat zu beschreiben und damit Modellvorstellungen zu entwickeln, auf deren Basis man Vorhersagen über diese Prozesse treffen oder sie sogar bewusst ausnutzen oder beeinflussen kann. Letzteres ist mit leicht anderer Schwerpunktsetzung auch Gegenstand der Technikwissenschaften.

Die "wissenschaftliche Strenge", die für eine solche Rationalität an den Tag zu legen ist, unterliegt fachübergreifenden Standards. Die Existenz derartiger Standards hat ihre Ursache nur zum Teil im gemeinsamen Ursprung der Einzelwissenschaften. Eine wesentlich wichtigere Quelle liegt in der gemeinsamen Methodologie und dem dabei verwendeten erkenntnistheoretischen Instrumentarium:

- aus einer Fülle von experimentell gewonnenem Datenmaterial werden *Regelmäßigkeiten* herausgefiltert,
- diese in Hypothesen mit dem bisherigen Kenntnisstand verbunden und entsprechend den Regeln wissenschaftlicher Schlussweise zu neuen *Gesetzmäßigkeiten* verdichtet,

- diese im Zuge weiterer Systematisierung und experimenteller Verifikation zu neuen *Theorien* zusammengefasst,
- um schließlich für praktische Anwendungen in einem handhabbaren *Kalkül* fixiert zu werden[1],
- der seinerseits die Basis für die Gewinnung neuen Datenmaterials auf der nächst höheren Abstraktionsebene bildet.

Eine solche in Richtung zunehmender Abstraktion weisende Erkenntnisspirale ist typisch für die "reinen" Wissenschaften. Um Wissenschaften im Zuge zunehmender Industrialisierung produktiv werden zu lassen, spielt die Anwendbarkeit und Anwendung theoretischen Wissens auf die gesellschaftliche Praxis eine ebenso wichtige Rolle. Diese Domäne der "angewandten" und Technik- oder Ingenieurwissenschaften folgt einem anderen erkenntnistheoretischen Paradigma:

- Reale Prozesse werden mit Hilfe eines geeigneten Kalküls *simuliert*.
- Die Simulation wird auf dem Hintergrund der verwendeten Theorie durch Analyse zu einem *Modell* verdichtet.
- Das Modell wird experimentell überprüft (und gegebenenfalls weiter verfeinert)
- Die gewonnenen Erkenntnisse werden in die Praxis implementiert.

In diesem Kreislauf spielen fertige Theorien und konkrete, bereits entwickelte Kalküle (nicht nur der Mathematik) eine zentrale Rolle.

Übergreifende Gesetzmäßigkeiten dieser Erkenntnisprozesse sind Gegenstand von *Querschnittswissenschaften*, von denen hier vor allem Philosophie, Mathematik und inzwischen auch die Informatik zu nennen sind.

Während die Philosophie die Denk- und Abstraktionsprozesse in ihrer Allgemeinheit zum Gegenstand hat, befasst sich die Mathematik mit *übergreifenden Gesetzmäßigkeiten, die beim Quantifizieren von Phänomenen auftreten*. Quelle und Target dieser Bemühungen sind die entsprechenden logischen Strukturen der Einzelwissenschaften, die oft erst durch die Anstrengungen der Mathematik eine streng deduktiven Ansprüchen genügende Konsistenz erhalten.

Die Mathematik leistet so einen unverzichtbaren und eigenständigen Beitrag für die methodische Fundierung der Einzelwissenschaften, ohne welchen letztere nur wenig über ein empirisches Verständnis ihres Gegenstands hinauskommen würden. Der Mathematik und mathematischen Methoden kommt damit besonders in der Phase der Hypothesen- und Theoriebildung, aber auch bei der Modellierung und Analyse realer Prozesse, ein wichtiger Platz für die Leistungsfähigkeit und argumentative Tiefe einzelwissenschaftlicher Erkenntnisprozesse zu. Sie ist außerdem die Grundlage einzelwissenschaftlicher Kalküle, egal, ob diese Quantenphysik, Elektronik, Statik oder Reaktionskinetik heißen. Mathematik ist in diesem Sinne die "lingua franca" der Wissenschaft und Technik.

Im Gegensatz zu spezielleren Kenntnissen aus einzelnen Bereichen der Natur- oder Ingenieurwissenschaften sind damit mathematische Kenntnisse und Fertigkeiten in unserer technisierten Welt nicht nur in breiterem Umfang notwendig, sondern werden auch an verschiedenen Stellen des (Berufs-)Lebens selbst bei Facharbeitern oder vergleichbaren Qualifikationen schlichtweg vorausgesetzt. Eine gewisse "mathematische Kultur", die über einfache Rechenfertigkeiten hinausgeht, ist heute für eine qualifizierte Teilhabe am sozialen Leben unumgänglich.

[1] Buchberger [3, S. 808] spricht in diesem Zusammenhang von der "Trivialisierung" einer Problemklasse (der symbolischen Mathematik).

Jedoch ist nicht nur der Einzelne auf solche Kenntnisse angewiesen, sondern auch die Gesellschaft als Ganzes. Denn erst eine solche "Kultur des Denkens" sichert die Fähigkeit, innerhalb der Gesellschaft auf einem Niveau zu kommunizieren, das für die Beherrschung der sozialen Prozesse erforderlich ist, die sich aus der immer komplexeren technologischen Basis ergeben. Unter diesem Blickwinkel mag es nicht weiter verwundern, dass der Teil des durch die Mathematik entwickelten methodischen und begrifflichen Rüstzeugs, der inzwischen in die Allgemeinbildung Einzug gehalten hat, in den letzten 200 Jahren stetig gewachsen ist.

Obwohl es immer wieder Diskussionen über die Angemessenheit solcher Elemente im Schulunterricht gibt, zeigen die TIMS-Studien der letzten Jahre, die die mathematischen Fertigkeiten von Schülern in verschiedenen Ländern vergleichen, dass die allgemeine mathematische Kultur, die die Schule in Deutschland derzeit vermittelt, eher als mittelmäßig einzustufen ist. Auch wenn sich der eine oder andere Minister[2] von diesen Ergebnissen überrascht gab – darauf wird aus Fachkreisen[3] seit langem hingewiesen.

Die allgegenwärtige Verfügbarkeit leistungsfähiger Rechentechnik hebt diese "Verwissenschaftlichung" gesellschaftlicher Zusammenhänge auf eine qualitativ neue Stufe. Viele, auch umfangreichere Kalküle können nun mechanisiert oder sogar automatisiert werden und stehen damit für einen breiteren Einsatz zur Verfügung, womit sich zugleich die Reichweite wissenschaftlicher Gedankenführung für einen weiten Kreis von Anwendungen deutlich erhöht. Die Frage aus der Einleitung ist also eindeutig zugunsten von *mehr* Mathematik zu beantworten. Zu einer anderen Antwort kommt nur, wer die Anforderungen von morgen mit der Elle von gestern misst.

Neben Pflege, Weiterentwicklung und Vermittlung entsprechender *Denk-Kalküle*, dem traditionellen Gegenstand mathematischer Bildung, tritt damit eine weitere Querschnittswissenschaft, die *Informatik* auf den Plan. Ihr Aufgabenfeld erstreckt sich auf die vielfältigen Probleme und übergreifenden Aspekte, die mit der Erstellung, Pflege, Nutzungsunterweisung und Einbettung solcher technikbasierter Hilfsmittel geistiger Arbeit verbunden sind. Auch wenn gängige Definitionen des Gegenstands der Informatik derzeit stärker auf eine einzelwissenschaftliche Betrachtung, etwa als "Wissenschaft von der systematischen Verarbeitung von Informationen, besonders der automatischen Verarbeitung mit Digitalrechnern" ([4]) fokussieren, so ist es doch wohl eher die *Symbiose von Kalkül und Technologie*, kurz, eine sich neu herausbildende "technologische Seite des Denkens" (Buchberger), die die Rolle der Informatik als eigenständiger Querschnittswissenschaft prägt.

Dass sich daraus auch die Rechtfertigung eines eigenständigen Schulfaches "Informatik" ableitet, sei hier nur in Parenthese angemerkt.

Zur Genese des symbolischen Rechnens

In diesem Sinne hat sich die Informatik aus der Mathematik heraus entwickelt und stets auch ihre Spuren in der Mathematik selbst hinterlassen. Historisch wurde das Wort Computer bekanntlich zuerst mit einer Maschine zur schnellen Ausführung numerischer Rech-

[2]Rede von Staatsminister Dr. Rößler auf dem Bildungskongress "Sachsen macht Schule" am 23. Januar 1999 in Dresden, `http://www.sn.schule.de/smk/akmeld/biko/roessler.htm`

[3]Vgl. die Erklärung "Wieder schlechte Noten für den Mathematikunterricht in Deutschland – Anlaß und Chance für einen Aufbruch" der Fachverbände DMV / GDM / MNU zu den Ergebnissen der internationalen Mathematikstudie TIMSS-3, `http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/DMV/archiv/memoranda/timss3.html`

nungen verbunden. Große numerische Simulationen praktischer Prozesse spielen auch heute noch die zentrale Rolle in Anwendungen mathematischer Methoden auf Probleme aus Naturwissenschaft und Technik und bilden den Kern einer eigenen mathematischen Disziplin, des *Wissenschaftlichen Rechnens*[4].

All diesen Anwendungen ist gemein, dass sie zwar unter Verwendung ausgefeilter Programmiersprachen die Programmierfähigkeit eines Computers ausnutzen, sich letztlich aber allein auf das Rechnen mit (Computer)zahlen zurückführen lassen. Der Computer erscheint in ihnen stets als außerordentlich präzise und schnelle, im übrigen aber stupide *Rechen*maschine, eben als "number cruncher". So entsteht ein Bild seiner Fähigkeiten, das sowohl aus innermathematischen als auch informatik-theoretischen Überlegungen heraus eher einer künstlichen Beschränkung gleichkommt. Zeigt uns doch die Berechenbarkeitstheorie in Gestalt der Churchschen These, dass der Computer eine *Universalmaschine* ist, die prinzipiell in die Lage versetzt werden kann, jede nur denkbare algorithmische Tätigkeit auszuüben, wenn sie nur mit einem geeigneten Programm versehen ist. Er sollte also auch in der Lage sein, Symbole und nicht nur Zahlen nach wohlbestimmten Regeln zu verarbeiten.

Dass ein Computer auch zu einer solchen Symbolverarbeitung fähig ist, war lange vor dem Bau des ersten "echten" (von-Neumann-)Rechners bekannt. Bereits Charles Babbage (1792 - 1838), der mit seiner "Analytical Engine" 1838 ein dem heutigen Computer ähnliches Konzept entwickelte, ohne es aber je realisieren zu können, hatte diese Fähigkeiten einer solchen Maschine im Blick. Seine Assistentin, Freundin und Mäzenin, Lady Lovelace, schreibt (zitiert nach [8, S. 1]) :

> Viele Menschen, die nicht mit entsprechenden mathematischen Studien vertraut sind, glauben, dass mit dem *Ziel* von Babbage's Analytical Engine, Ergebnisse in Zahlennotation auszugeben, auch deren *Inneres* arithmetisch-numerischer Natur sein müsse statt algebraisch-analytischer. Das ist ein Irrtum. Die Maschine kann ihre numerischen Eingaben genau so anordnen und kombinieren, als wären es Buchstaben oder andere allgemeine Symbole; und könnte sie sogar *in einer solchen Form ausgeben*, wenn nur entsprechende Vorkehrungen getroffen würden.

Ein solches Verständnis ist uns heute, im Gegensatz zu den Pionieren des Computer-Zeitalters, im Lichte von ASCII-Code und Textverarbeitungssystemen allgemein geläufig, wenigstens was den Computer als intelligente Schreibmaschine betrifft. Mit dem Siegeszug der Kleinrechentechnik in den letzten 20 Jahren entwickelte er sich dabei vom Spielzeug und der erweiterten Schreibmaschine hin zu einem unentbehrlichen Werkzeug der Büroorganisation, wobei vor allem seine Fähigkeit, (geschriebene) Information speichern, umordnen und verändern zu können, eine zentrale Rolle spielt. In diesem Anwendungssektor kommt also die Fähigkeit des Computers, *symbolische Informationen* verarbeiten zu können, bereits unmittelbar auch für den Umgang mit Daten zum Einsatz. Dabei verwischt sich, genau wie von Lady Lovelace vorausgesehen, durch die binäre Kodierung symbolischer Information die Grenze zwischen Zahlen und Zeichen, die zuerst so absolut schien.

Auf dieser Abstraktionsebene ist es auch möglich, die verschiedensten Nachschlagewerke und Formelsammlungen, also in symbolischer Form kodiertes Wissen, mit dem Computer

[4]Allerdings definiert sich Wissenschaftliches Rechnen normalerweise nicht über die verwendeten Kalküle, sondern in Abgrenzung zur "reinen Mathematik" über das zu Grunde liegende (und weiter oben bereits beschriebene) Anwendungsparadigma.

aufzubereiten, in datenbankähnlichen Strukturen vorzuhalten und mit entsprechenden Textanalyseinstrumenten zu erschließen. Es wird sogar möglich, auf verschiedene Weise symbolisch kodierte Informationen in multimedialen Produkten zu verknüpfen, was das ungeheure innovative Potential dieser Entwicklungen verdeutlicht. In der Hand des Ingenieurs und Wissenschaftlers entwickelt sich damit der Computer zu einem sehr effektiven Instrument, das nicht nur den Rechenschieber, sondern auch zunehmend Formelsammlungen abzulösen in der Lage ist. Auf diesem Niveau handelt es sich allerdings noch immer um eine *syntaktische* Verarbeitung von Information, wo der Computer deren *Sinn* noch nicht in die Verarbeitung einzubeziehen vermag.

Kehren wir zum Einsatz des Computers zu *numerischen* Zwecken zurück. Obwohl nicht so deutlich sichtbar, enthält dieser bereits eine wichtige symbolische Komponente: Er hat das Programm für die Rechnungen in adäquater Form in seinen Speicher zu bringen und von dort wieder zu extrahieren. Diese Art symbolischer Information ist bereits *semantischer Art*, da die auf diese Weise dargestellten *Algorithmen* inhaltliche Aspekte der verarbeiteten Zahlengrößen erschließen. Dass dies vom Nutzer nicht in gebührender Form wahrgenommen wird, hängt in erster Linie mit der strikten Trennung von (numerischen) Daten und (symbolischem) Programm sowie der Betrachtung des Computers als virtuelle Maschine ("Das Programm macht der Programmierer, die Rechnung der Computer") zusammen.

Bringt man beide Ebenen, die Daten und die Programme, zusammen, ermöglicht also algorithmische Operationen auch auf symbolischen Daten, geht man einen großen Schritt in die Richtung, semantische Aspekte auch symbolischer Information einer automatischen Verarbeitung zu erschließen. Denken lernt der Computer damit allerdings nicht, denn auch die Algorithmik symbolischer Informationsverarbeitung benötigt zunächst den in menschlicher Vorleistung erdachten *Kalkül*, den der Computer dann in der Regel schneller und präziser als der Mensch auszuführen vermag.

In diesem Schnittpunkt moderner Entwicklungen befindet sich die *Computeralgebra.* Mit ihrem ausgeprägten Werkzeugcharakter und einer starken Anwendungsbezogenheit steht sie paradigmatisch dem (klassischen Gegenstand des) Wissenschaftlichen Rechnen nahe und wurde lange Zeit nur als Anhängsel dieser sich aus der Numerik heraus etablierten mathematischen Disziplin verstanden. Ihre Potenzen sind aber vielfältiger. Zunächst steht sie in einer Reihe mit anderen nichtnumerischen Applikationen einer "Mathematik mit dem Computer" wie z.B. Anwendungen der diskreten Mathematik (Kombinatorik, Graphentheorie) oder der diskreten Optimierung, die *endliche* Strukturen untersuchen, die sich *exakt* im Computer reproduzieren lassen.

Die *strukturelle Endlichkeit* ihrer Konstrukte prädestinierte die diskrete Mathematik, eine Vorreiterrolle bei der Computerisierung der "exakten" Mathematik zu spielen; und sie tat dies auch spätestens seit dem spektakulären Beweis des Vier-Farben-Satzes durch Appel und Haken [1]. Damit zog zugleich neben dem bis dahin dominierenden numerischen ein deduktives Mathematikverständnis in den Computerbereich ein, das den Ansprüchen wissenschaftlicher Rationalität wesentlich näher steht. Das tiefere Verständnis der Unterschiede zwischen beiden Zugängen ist ein wichtiges Element bei der Bestimmung des Platzes, der dem symbolischen Rechnen als *Technologie* zukommt, soll hier aber nicht vertieft werden, vgl. etwa [9].

Mathematische Konstrukte sind allerdings in der Regel nicht strukturell, sondern nur *beschreibungs-endlich*, so dass in allgemeineren Situationen noch einmal eine Reduktionsleistung vollbracht werden muss. Diese ergibt sich in vielen Fällen auf natürliche Weise aus der Art, wie Theorien und vor allem deren Kalküle inner-mathematisch formuliert werden. Diese

Formulierungen müssen “nur noch” in computeradäquate Strukturen umgesetzt werden. Hier hat die Computeralgebra eines ihrer großen Aufgabenfelder.

Neben konkreten Implementierungen wichtiger mathematischer Verfahren reicht die Bedeutung der Computeralgebra aber über den Bereich der algorithmischen Mathematik hinaus. Die Vielzahl mathematischer Verfahren, die in einem modernen CAS unter einer *einheitlichen* Oberfläche verfügbar sind, machen dieses zu einem *metamathematischen Werkzeug* für Anwender, ähnlich den Numerikbibliotheken, die im Wissenschaftlichen Rechnen eine zentrale Rolle spielen.

Der Aspekt der Symbiose mit informatischen Entwicklungen ist im Bereich der Computeralgebra derzeit am deutlichsten ausgeprägt. Er wird dazu führen, dass sich die heute noch getrennt agierenden Bereiche zu einer “Computermathematik” ([6]) vereinen werden, in der computergestützte numerische, diskrete und symbolische Methoden gleichberechtigt nebeneinander stehen und in praktischen Applikationen ineinander greifen.

Wie die Mathematik als lingua franca das Denken in weiten Bereichen der Natur- und Ingenieurwissenschaften prägt, so wird diese Computermathematik das Herzstück computergestützter fachwissenschaftlicher “Denkwerkzeuge” sein und das zentrale Element einer *Technologie des Denkens* bilden. Das Verständnis für computer-mathematische und damit insbesondere auch für computer-algebraische Denkweisen wird auch in Bereichen eine Rolle spielen, die sich heute noch weit entfernt von Mathematik und Informatik wähnen. Die Bedeutung dieser Denkweisen für eine mathematische Kultur der Gesellschaft ist deshalb kaum zu unterschätzen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Computeralgebra nicht eine weitere Computeranwendung schlechthin unter vielen anderen ist, sondern *in natürlicher Weise* Entwicklungen, die die Informatik als Ganzes hervorgebracht haben, weiterführt: Der Computereinsatz für symbolische Rechnungen eröffnet einen neuen Abschnitt auf dem Weg des Computers vom primitiven Bitknipser zu einem Universalwerkzeug für geistige Arbeit. Es beginnt damit eine neue Etappe auf dem Weg der praktischen Realisierung des theoretischen Anspruchs, den die Church'sche These impliziert.

Ein pikantes Detail liegt in der Ignoranz dieser Entwicklungen durch Teile der etablierten Informatik selbst, denn Darlegungen zur Computeralgebra sucht man in verschiedenen Quellen, die sich eine umfassende Darstellung der Informatik vorgenommen haben, vergebens. So enthalten weder der “Duden Informatik” [4] noch das “Lexikon Informatik” [11] ein Stichwort *symbolisches Rechnen* oder *Computeralgebra*. Aber auch hier scheinen sich Gewichte zu verschieben, wie ein Blick in das neue “Handbuch Informatik” [10] belegt, in dem ein ganzer Abschnitt dem symbolischen Rechnen gewidmet ist (aus dem wir weiter oben bereits zitiert haben).

Wie wird es weiter gehen?

Die von der Computeralgebra produzierten Werkzeuge spielen bereits heute eine stark zunehmende Rolle sowohl in den Natur- als auch in den Ingenieurwissenschaften. Dies dokumentiert sowohl die wachsende Zahl von Anwenderpaketen der verschiedenen großen Systeme als auch eine beeindruckende Zahl von Büchern zu dieser Thematik. Für einen vollständigeren Überblick über Tendenzen und Anwendungen der Computeralgebra sei auf den Computeralgebra-Report [7] verwiesen.

Den Einfluss dieser neuen Arbeitsmittel auf den Umbruch unserer technisierten Arbeitswelt insbesondere im ingenieurtechnischen Bereich kann man kaum überschätzen. Dort, wo heute noch dicke Formelsammlungen und Tafelwerke das Berufsbild prägen, die trotz ihrer Dicke genau wie ein Berg numerischer Daten immer nur eine sehr beschränkte Sicht auf *Fakten* und keine *Einsichten* vermitteln können, werden Werkzeuge, die auf symbolischen Fähigkeiten im beschriebenen Sinne aufsetzen, diese Bereiche geistiger Arbeit in vielleicht noch nachhaltigerer Weise revolutionieren als dies mit der Erfindung des Buchdrucks geschah.

Schließlich eröffnen die damit verbundenen Möglichkeiten, nun auch algorithmisches Know How in großem Umfang zu vergegenständlichen, vollkommen neue Dimensionen der Wissensrepräsentation.

J.Grabmeier beschreibt die Perspektiven eines solchen *Übergangs von einer fakten- zu einer stärker algorithmenorientierten Wissensrepräsentation* in [6] wie folgt:

> Viele Probleme aus der Ingenieurwelt, den Naturwissenschaften und den Wirtschaftswissenschaften sind heute ohne massiven Einsatz von Computern nicht lösbar. Die dahinterliegenden Probleme werden mit den Methoden des Wissenschaftlichen Rechnens angegangen. Dabei werden mehr und mehr die traditionellen numerischen Rechnungen durch symbolisches Rechnen mit dem Computer ersetzt bzw. ergänzt...
>
> Der Siegeszug der Computeralgebra in den letzten Jahren ist eng gekoppelt mit der stürmischen Entwicklung von immer neuen Rechnergenerationen, die es erst möglich gemacht hat, die besonders rechen- und speicherintensiven Programme und Systeme zum symbolischen Rechnen zu realisieren.
>
> Aber der Aufwand lohnt sich: Wenn man statt einer Zahl eine parameterabhängige Formel als Ergebnis erzielt, hat man nicht nur ein Problem gelöst, sondern eine Klasse von möglicherweise *unendlich vielen* Problemen erledigt. Dadurch wird ein Qualitätssprung möglich, denn die Formel erlaubt es nun z.B., die Parameter zu optimieren oder schnell auf Veränderungen zu reagieren. ...
>
> Wie heute ein Taschenrechner zum Alltag gehört, wird künftig jeder Ingenieur und jeder, zu dessen Aufgaben das Lösen, Erlernen oder Lehren mathematischer Probleme gehört, Zugriff auf ein Computeralgebra-System haben. Die verschiedenen schon heute verfügbaren Komponenten für numerisches und symbolisches Rechnen, für Statistik und andere mathematische Gebiete, für Graphik und Animation, Textverarbeitung und Dokumentation mit Hypertext-Systemen und vieles mehr sehe ich in nicht allzu ferner Zukunft über entsprechende Schnittstellen zu individuell kombinierbaren Computermathematik-Systemen für das Wissenschaftliche Rechnen zusammenwachsen. Die Computeralgebra leistet damit einen wesenlichen Beitrag für eine der Schlüsseltechnologien unserer technikbestimmten Gesellschaft.

Diese Zusammenführung der Computermathematik mit anderen Technologien in einer vollkommen neuen Qualität eines *persönlichen digitalen Assistenten* (PDA) prägt heute schon das Erscheinungsbild Mathematica und Maple, die Vorreiter unter den CAS. Sie ermöglichen es, als bequeme Werkzeuge für die eigene geistige Arbeit lokal auf dem Schreibtisch des Wissenschaftlers oder Ingenieurs einen immer größeren Teil des globalen Know Hows verschiedener Fachrichtungen in einer auch algorithmisch leicht zugänglichen Form bereitzuhalten und mit anderen Wissensmanagement-Techniken (Internet, Datenbanken, Desktop-Publikationssysteme) zu verknüpfen.

Curriculare Konsequenzen

Die curricularen Konsequenzen aus diesen Entwicklungen werden ähnlich tiefgreifend sein müssen wie die Entwicklungen selbst, wenn die studentische Ausbildung mit den neuen Anforderungen Schritt halten will.

Konsequenzen für den Einsatz von Werkzeugen des symbolischen Rechnens (in der oben thematisierten technologischen Dimension) sind dabei einzubetten in Konsequenzen, die sich generell aus der zu erwartenden Allgegenwart des Computers ergeben. Eine elementare Prämisse stellt die Verankerung einer informatischen Allgemeinbildung im Schul-Curriculum dar, um die derzeit nicht nur in Sachsen erbitterte Grabenkämpfe zwischen der Ministerialbürokratie und dem Rest der Welt geführt werden. Statt provisorischer Augenblickslösungen, die sich an großzügige und nur auf den ersten Blick uneigennützige Angebote großer Firmen aus dem Computer- oder Telekommunikationsbereich wie an einen Strohhalm klammern, sind dabei langfristig materiell, personell und auch didaktisch abgesicherte Konzepte gefragt. Gute "offizielle" Konzepte in dieser Richtung sind Mangelware. Eine Gruppe interessierter (und betroffener) Informatiklehrer aus Sachsen ([5]) hat ein solches Konzept entwickelt, das propädeutische Elemente in der Grundstufe, eine systematische Einführung in allgemeinbildende Aspekte der Informatik in der Sek I und ausgewählte weiterführende Anwendungsaspekte in der Sek II vorsieht.

Auf einer solchen Ausbildung kann die Unterweisung des naturwissenschaftlichen und ingenieurtechnischen Nachwuchses im Einsatz speziellerer computermathematischer Werkzeuge aufsetzen, wobei wie beim Taschenrechner-Einsatz die drei Etappen

1. propädeutische Sensibilisierung
2. fachwissenschaftlicher Einsatz
3. Systematisierung der gewonnenen Erfahrungen

zu durchlaufen sind. Die propädeutische Sensibilisierung kann durch den Einsatz von Computeralgebrasystemen im Unterricht der Sek II erreicht werden (und nur in einer solchen sehe ich derzeit wirklich einen Sinn von CAS in der Schule), so dass wir in absehbarer Zeit auf Studienanfänger hoffen können, denen der Gebrauch dieser Denkwerkzeuge nicht mehr fremd ist.

Die durchgängige Verwendung in der fachwissenschaftlichen Ausbildung ist der Platz, an dem die genannte Zielgruppe weitere eigene Erfahrungen im Einsatz computeralgebraisch basierter Werkzeuge sammeln kann. Auf die unbestreitbaren didaktischen Potenzen, diesen Studenten in dem Zusammenhang auch die Mathematik etwas näher zu bringen, will ich hier nicht eingehen.

Auf der Basis dieser Erfahrungen ist es angezeigt, die Studenten mit den Möglichkeiten und Grenzen von Computeralgebra-Werkzeugen *in systematisierender Form* vertraut zu machen, damit sie die Komplexität dieser Instrumente gezielt, qualifiziert und kulturvoll zum Einsatz bringen können, kurz, einen guten "Programmierstil" entwickeln. Es geht dabei um die Vermittlung grundlegender mathematischer *und* informatischer Prinzipien, die dem Nutzer in verschiedenen Computeralgebra-Anwendungen immer wieder begegnen. Neben fortgeschrittenen Studenten sollten auch Computeralgebra-Lehrkräfte diese Prinzipien kennen und im Zuge des Einsatzes von CAS in eigenen Lehrveranstaltungen berücksichtigen, um dem Nachwuchs bereits in einer frühen Phase das "richtige Gefühl" für die qualifizierte Nutzung dieser Werkzeuge zu vermitteln.

Diese Inhalte können in eine Grundausbildung Informatik integriert werden und dort auf entsprechende Systematisierungen von Algorithmen, Datenstrukturen und Programmiererfahrungen aufbauen, aber auch Gegenstand einer eigenständigen zweistündigen Lehrveranstaltung sein.

Einführung in das symbolische Rechnen – Inhalte

Die zu vermittelnden Konzepte und Begrifflichkeiten bedürfen noch einer deutlicheren Fixierung seitens der Computeralgebra selbst. Die Vorstellungen, die ich hier vortragen möchte, bilden die Grundlage einer Lehrveranstaltung, die ich in den letzten Jahren regelmäßig an der Universität Leipzig abgehalten habe. Sie wurde vorwiegend von Studenten der Informatik, aber auch der Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Physik belegt.

Mit Blick auf die sehr heterogenen mathematischen Vorkenntnisse der Hörer ist das zu präsentierende Material mit Bedacht zu wählen. Im Kurs werden die folgenden großen Themenkomplexe behandelt:

1. Einleitung
2. Computeralgebrasysteme im Einsatz
3. Die Stellung des symbolischen Rechnens im Wissenschaftsgebäude
4. Aufbau und Arbeitsweise eines CAS der zweiten Generation
5. Das Simplifizieren von Ausdrücken
6. Algebraische Zahlen
7. Die Stammfunktion einer rationalen Funktion

Die einzelnen Kapitel berühren Aspekte, die in verschiedenen Kontexten zu systematisieren sind. So geht es zunächst um Modi, in denen CAS eingesetzt werden können, sowie um eine Einordnung des Fachs, die der hier vorgetragenen Argumentation folgt. Es schließen sich informatische und mathematische Aspekte an, die beim Umgang mit CAS der zweiten Generation, also typlosen Interpreter-Oberflächen, zu beachten sind. Auf der informatischen Seite sind dies vor allem

- Der prinzipielle Aufbau eines CAS
- Probleme, die sich aus Datentypen und Polymorphie ergeben
  syntaktische Typsysteme
- Homogene Datenrepräsentation durch Listen
- Die Variablen/Symbol-Dualität
  Konsequenzen aus der Überlappung von Namensraum und Wertebereich
  Rolle der Symboltabelle und Parallelen zum Compilerbau
- Der Funktionsbegriff im symbolischen Rechnen
  Funktionsaufrufe, Funktionssymbole und Funktionstransformationen
- Steuerstrukturen im symbolischen Rechnen

Die mathematische Seite des Kurses konzentriert sich zunächst auf das Simplifizieren von Ausdrücken, insbesondere auf die Fragen

- kontext- und funktionsgesteuerte Simplifikationen
- Simplifikation und mathematische Exaktheit
- Die Simplifikationsproblematik aus theoretischer Sicht
- Schnelle Simplifikatoren: die rationale Normalform
- Regelbasierte Simplifikation am Beispiel trigonometrischer Ausdrücke
- Komplizierte Simplifikationen und Unentscheidbarkeit

Aus den folgenden Gründen schließt sich ein genaueres Studium algebraischer Zahlen an:

- Algebraische Zahlen sind allgegenwärtig in den Ausgaben von CAS
- Algebraische Zahlen in Radikaldarstellung sind den Hörern geläufig und ein gutes Anschauungsmaterial zur Festigung des im Abschnitt "Simplifikation" vermittelten Wissens
- die (ungewohnte) `RootOf`-Darstellung hat ein wesentlich besseres Simplifikationsverhalten als die Radikaldarstellung
- CAS erlauben anschauliche und konstruktive Beweise der wichtigsten Sätze über das Rechnen mit algebraischen Zahlen, die entsprechende Fertigkeiten der CAS begründen

In diesem Kontext wird die "Philosophie des sparsamen Umgangs mit algebraischen Zahlen" deutlich, die in den Applikationen im letzten Teil des Kurses noch vertieft wird.

Zu dem Kurs existiert ein Skript sowie eine Sammlung von Übungsaufgaben und einführendes Material zur Nutzung der bei uns gebräuchlichen CAS, also Maple, MuPAD, Reduce und (in Arbeit) Mathematica. Da die weiter oben formulierten Prämissen auf absehbare Zeit noch nicht gegeben sein werden, biete ich außerdem ein CA-Praktikum an, in dem der Umgang mit verschiedenen CAS geübt werden kann.

Literatur

[1] K. Appel and W. Haken. A proof of the four color theorem. *Discrete Math.*, 16:179–180, 1976.

[2] *Brockhaus Enzyklopädie in 26 Bänden.* F.A. Brockhaus, Mannheim, 1994.

[3] B. Buchberger. Symbolisches Rechnen. In P. Rechenberg and H. Pomberger, editors, *Informatik-Handbuch*, chapter E5, pages 799 – 817. Hanser, München, 1997.

[4] H. Engesser, editor. *Duden Informatik.* Dudenverlag, Mannheim, 1993.

[5] GI-Fachgruppe 7.0.3 für InformatiklehrerInnen, Landesgruppe Sachsen. Siehe `marvin.sn.schule.de/~gi/`.

[6] J. Grabmeier. Computeralgebra – eine Säule des Wissenschaftlichen Rechnens. *it + ti*, 6:5 – 20, 1995.

[7] J. Grabmeier and V. Weispfenning, editors. *Computeralgebra in Deutschland – Bestandsaufnahme, Möglichkeiten, Perspektiven.* Fachgruppe der GI, DMV, GAMM, Passau and Heidelberg, 1993. Eine überarbeitete und wesentlich erweiterte Auflage erscheint im Jahr 2000 bei Springer.

[8] D.E. Knuth. *The art of computer programming.* Addison Wesley, 1991.

[9] R. Pavelle, M. Rothstein, and J.P. Fitch. Computer algebra. *Scientific American*, 245(6):102 – 113, dec 1981.

[10] P. Rechenberg and H. Pomberger, editors. *Informatik-Handbuch.* Hanser, München, 1997.

[11] Schneider, editor. *Lexikon Informatik.* Oldenbourg, München, 4.0 edition, 1997.