Einführung in das symbolische Rechnen

Eine Lehrveranstaltung

zwischen

Mathematik und Informatik

Hans-Gert Gräbe
Institut für Informatik
Universität Leipzig

www.informatik.uni-leipzig.de/~graebe

Zur Genese von Wissenschaft

Bis ins Mittelalter:

- ganzheitlicher Wissenschaftsanspruch
- Privileg wohlhabender Privatgelehrter
- im Alltag absolut untergeordnete Rolle

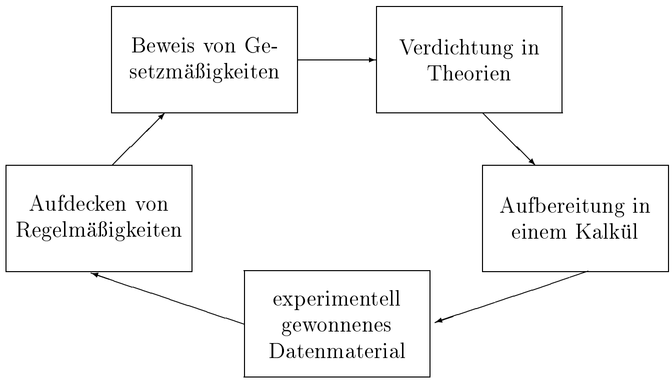
Aufbruch ins Industriezeitalter:

- Trennung zwischen Geistes- und Naturwissenschaften
- *wissenschaftliche Rationalität* als beherrschender Wissenstypus item Wissenschaft im Alltag

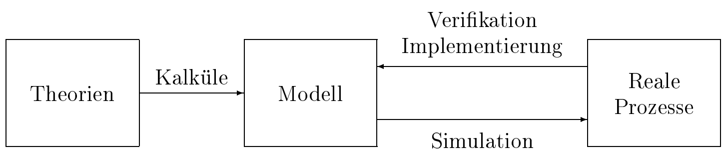
Rationalitätsbegriff der einzelnen Naturwissenschaften als Fachwissenschaften:

> In der Natur ablaufende Prozesse aus der Sicht ihres jeweiligen Fachgebiets adäquat beschreiben und damit Modellvorstellungen entwickeln, auf deren Basis man Vorhersagen über diese Prozesse treffen oder sie sogar bewusst ausnutzen oder beeinflussen kann.

Wissenschaftliche Strenge als zentraler Begriff, der fachübergreifenden Standards unterliegt.



Die Erkenntnisspirale der "reinen" Wissenschaften



Paradigma der "angewandten" Wissenschaften

Querschnittswissenschaften:

Philosophie betrachtet allgemeine Denk- und Abstraktionsprozesse in ihrer Gesamtheit

Mathematik befasst sich mit übergreifenden Gesetzmäßigkeiten, die beim Quantifizieren von Phänomenen auftreten.

Mathematik ist in diesem Sinne die "lingua franca" der (Natur- und Ingenieur-) Wissenschaft.

Bedeutung einer gewissen "mathematischen Kultur" für die Gesellschaft als Ganzes

Qualitativ neue Stufe der “Verwissenschaftlichung” gesellschaftlicher Zusammenhänge durch allgegenwärtig verfügbare leistungsfähige Rechentechnik

Querschnittswissenschaft, die die Erstellung, Pflege, Nutzungsunterweisung und Einbettung für solche technikbasierte Hilfsmittel geistiger Arbeit zum Gegenstand hat, ist die **Informatik**.

Die *Symbiose von Kalkül und Technologie*, diese sich neu herausbildende “technologische Seite des Denkens” (Buchberger), prägt die eigenständige Rolle der Informatik.

Symbolisches Rechnen und der Computer als Universalmaschine

Computer als “number cruncher”:

- zentrales Paradigma: schnelles Rechnen mit (Computer)zahlen
- Kern des *wissenschaftlichen Rechnens* im heutigen Verständnis

Churchsche These:

> Jede im intuitiven Sinne berechenbare Funktion ist Turing-berechenbar.

oder

> Jedes in irgend einer Form algorithmisierbare Verfahren kann prinzipiell auf einem Computer implementiert werden.

Der Computer ist eine Universalmaschine.

Ada Augusta Lady von Lovelace (1844):

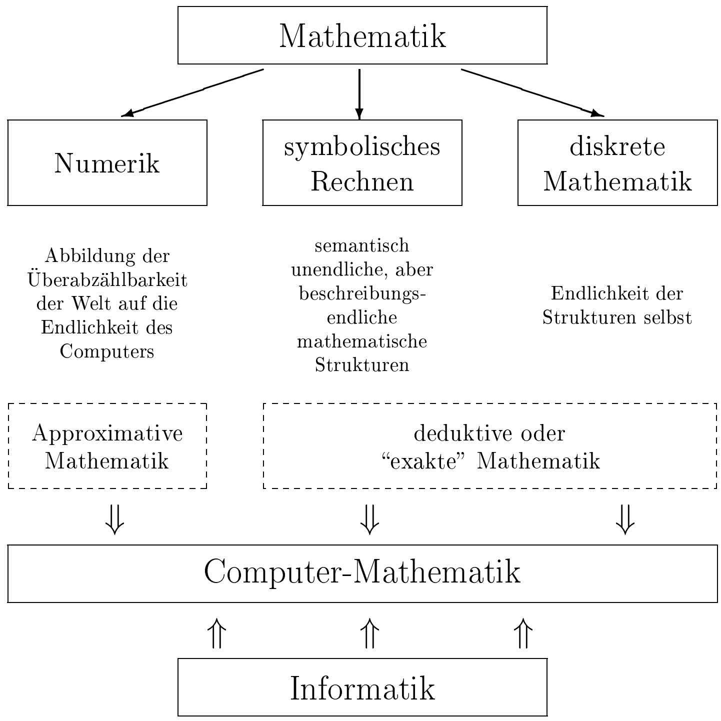
Viele Menschen, die nicht mit entsprechenden mathematischen Studien vertraut sind, glauben, daß mit dem Ziel *von Babbage's Analytical Engine, Ergebnisse in Zahlennotation auszugeben, auch deren* Inneres *arithmetisch-numerischer Natur sein müsse statt algebraisch-analytischer. Das ist ein Irrtum. Die Maschine kann ihre numerischen Eingaben genau so anordnen und kombinieren, als wären es Buchstaben oder andere allgemeine Symbole; und könnte sie sogar* in einer solchen Form ausgeben, *wenn nur entsprechende Vorkehrungen getroffen würden.*

Algorithmen Teil 1: Numerik vs. Symbolik

Algorithmen Teil 2: Syntax vs. Semantik

Bringt man beide Ebenen zusammen, ermöglicht also algorithmische Operationen auch auf symbolischen Daten, geht man einen großen Schritt in die Richtung, semantische Aspekte auch symbolischer Information einer automatischen Verarbeitung zu erschließen.

In diesem Schnittpunkt moderner Entwicklungen befindet sich die *Computeralgebra*.



Die Genese der Computermathematik

Computeralgebrasysteme als metamathematische Werkzeuge

Wie die Mathematik als lingua franca das Denken in weiten Bereichen der Natur- und Ingenieurwissenschaften prägt, so wird diese Computermathematik das Herzstück computergestützter fachwissenschaftlicher “Denkwerkzeuge” sein und das zentrale Element einer *Technologie des Denkens* bilden.

Das Verständnis für computer-mathematische und damit insbesondere auch für computeralgebraische Denkweisen wird auch in Bereichen eine Rolle spielen, die sich heute noch weit entfernt von Mathematik und Informatik wähnen.

Die Bedeutung dieser Denkweisen für eine mathematische Kultur der Gesellschaft ist deshalb kaum zu unterschätzen.

Zusammenführung der Computermathematik mit anderen Technologien in einer vollkommen neuen Qualität eines *persönlichen digitalen Assistenten* (PDA)

Beispiel: Mathematica und Maple als bequeme Werkzeuge für die eigene geistige Arbeit

Ermöglicht es, auf dem lokalen Schreibtisch

- einen immer größeren Teil des globalen Know Hows
- verschiedener Fachrichtungen
- in einer auch algorithmisch leicht zugänglichen Form bereitzuhalten und
- mit anderen Wissensmanagement-Techniken (Internet, Datenbanken, Desktop-Publikationssysteme) zu verknüpfen.

Curriculare Konsequenzen

Konsequenzen sind einzubetten in Konsequenzen, die sich generell aus der zu erwartenden Allgegenwart des Computers ergeben.

Eine elementare Prämisse stellt die Verankerung einer informatischen Allgemeinbildung im Schul-Curriculum dar.

1. propädeutische Elemente in der Grundstufe
2. systematische Einführung in allgemeinbildende Aspekte der Informatik in der Sek I
3. ausgewählte weiterführende Anwendungsaspekte in der Sek II

Unterweisung des naturwissenschaftlichen und ingenieurtechnischen Nachwuchses im Einsatz speziellerer computermathematischer Werkzeuge

1. propädeutische Sensibilisierung
2. fachwissenschaftlicher Einsatz
3. Systematisierung der gewonnenen Erfahrungen

Ziel der Systematisierung: Vermittlung grundlegender mathematischer *und* informatischer Prinzipien, die dem Nutzer in verschiedenen Computeralgebra-Anwendungen immer wieder begegnen.

Auch Computeralgebra-Lehrkräfte sollten diese Prinzipien kennen und im Zuge des Einsatzes von CAS in eigenen Lehrveranstaltungen berücksichtigen, um dem Nachwuchs bereits in einer frühen Phase das “richtige Gefühl” für die qualifizierte Nutzung dieser Werkzeuge zu vermitteln.

Die zu vermittelnden Konzepte und Begrifflichkeiten bedürfen noch einer deutlicheren Fixierung seitens der Computeralgebra selbst.

Themenkomplexe

1. Einleitung
2. Computeralgebrasysteme im Einsatz
3. Die Stellung des symbolischen Rechnens im Wissenschaftsgebäude
4. Aufbau und Arbeitsweise eines CAS der zweiten Generation
5. Das Simplifizieren von Ausdrücken
6. Algebraische Zahlen
7. Die Stammfunktion einer rationalen Funktion

Der Kompromiss mit der heutigen Realität

- CAS als Taschenrechner für Zahlen
- CAS als Taschenrechner für Formeln
- CAS als Problemlösungsumgebungen
- CAS als Expertensysteme
- Erweiterbarkeit von CAS

Die informatische Komponente

- Der prinzipielle Aufbau eines CAS
- Probleme, die sich aus Datentypen und Polymorphie ergeben
  syntaktische Typsysteme
- Homogene Datenrepräsentation durch Listen
- Die Variablen/Symbol-Dualität
  Konsequenzen aus der Überlappung von Namensraum und Wertebereich
  Rolle der Symboltabelle und Parallelen zum Compilerbau
- Der Funktionsbegriff im symbolischen Rechnen
  Funktionsaufrufe, Funktionssymbole und Funktionstransformationen
- Steuerstrukturen im symbolischen Rechnen

Die mathematische Komponente I
Die Simplifikationsproblematik

- kontext- und funktionsgesteuerte Simplifikationen
- Simplifikation und mathematische Exaktheit
- Die Simplifikationsproblematik aus theoretischer Sicht
- Schnelle Simplifikatoren: die rationale Normalform
- Regelbasierte Simplifikation am Beispiel trigonometrischer Ausdrücke
- Komplizierte Simplifikationen und Unentscheidbarkeit

Die mathematische Komponente II
Algebraische Zahlen

- Algebraische Zahlen sind allgegenwärtig in den Ausgaben von CAS
- Algebraische Zahlen in Radikaldarstellung sind den Hörern geläufig und ein gutes Anschauungsmaterial zur Festigung des im Abschnitt "Simplifikation" vermittelten Wissens
- die (ungewohnte) `RootOf`-Darstellung hat ein wesentlich besseres Simplifikationsverhalten als die Radikaldarstellung
- CAS erlauben anschauliche und konstruktive Beweise der wichtigsten Sätze über das Rechnen mit algebraischen Zahlen, die entsprechende Fertigkeiten der CAS begründen